Secondo semestre di Geometria 1

Francesco Sorce

Appunti del corso tenuto dai proff.
Manfredini Sandro e Collari Carlo.

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
Anno Accademico 2021/2022

Indice

Capitolo 1

Polinomio Minimo di un Endomorfismo

Per le applicazioni lineari diagonalizzabili abbiamo osservato che il polinomio caratteristico è un invariante completo, ma questo non è sufficiente per le applicazioni triangolarizzabili. Esploriamo un altro invariante, il polinomio minimo:

1.1 Valutazione in un endomorfismo

Definizione 1.1 (Valutazione in un endomorfismo)**.**
Data $f \in \operatorname{End}(V)$, impiegando la notazione $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$ con $f^0 = id_V$, sia

$$\mathbb{K}[t] \ni p = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \quad p(f) = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i \in \operatorname{End}(V)$$

il polinomio p *valutato nell'endomorfismo* f. Possiamo quindi definire l'applicazione valutazione su f come segue

$$val_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[t] & \longrightarrow & \operatorname{End}(V) \\ p & \longmapsto & p(f) \end{array} .$$

Osservazione 1.2.
val_f è un omomorfismo di anelli. Infatti

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i t^i + \sum_{i=0}^{h} b_i t^i \right)(f) = \sum_{i=0}^{\max(k,h)} (a_i + b_i) f^i = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i + \sum_{i=0}^{h} b_i f^i$$

e

$$\left(\sum_{i=0}^{k} a_i f^i \right) \circ \left(\sum_{i=0}^{h} b_i f^i \right) = \sum_{i=0}^{k} a_i \ f^i \left(\sum_{j=0}^{h} b_j f^j \right) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{h} a_i b_j f^{i+j} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{h} a_i b_j t^{i+j} \right)(f) = \left(\left(\sum_{i=0}^{k} a_i t^i \right) \left(\sum_{i=0}^{h} b_i t^i \right) \right)(f).$$

Definizione 1.3.

$$\operatorname{Imm} val_f = \operatorname{Span}(id_V, f, f^2, \cdots) = \mathbb{K}[f]$$

$$\ker val_f = \{ p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f) = 0 \} = I(f)$$

Essendo val_f un omomorfismo di anelli, $\mathbb{K}[f]$ è un sottoanello commutativo di $\operatorname{End}(V)$.
Osserviamo che

$$I(f) = \{ p \in \mathbb{K}[t] | \forall \underline{v} \in V p(f)(\underline{v}) = \underline{0} \} = \{ p \in \mathbb{K}[t] | \ker p(f) = V \},$$

quindi $I(f)$ sono le combinazioni lineari nulle delle potenze di f.

Proposizione 1.4.

$$\dim \mathbb{K}[f] = \min\{ k \mid \{ id_v, f, \cdots, f^k \} \ \textit{lin.dip.} \}.$$

Dimostrazione. Sia $r = \min\{k \mid \{id_v, f, \cdots, f^k\} \text{ lin.dip.}\}$. Osserviamo che r è ben definito dato che sicuramente è minore di $\dim \mathrm{End}(V) = n^2$. Abbiamo trivialmente che $r \leq \dim \mathbb{K}[f]$. Mostriamo per induzione su h che $f^{r+h} \in \mathrm{Span}(id_V, f, \cdots, f^{r-1})$.
$h = 0$) Per ipotesi $id_V, f, \cdots, f^r$ sono linearmente dipendenti.
$h > 0$) $f^{r+h} = f^h \circ f^r = f^h \circ \left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i f^i\right) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i f^{i+h}$ allora per ipotesi induttiva vale la tesi. □

Osservazione 1.5.
$I(f)$ è un ideale proprio di $\mathbb{K}[t]$.

Dimostrazione. ($I(f)$ *ideale*) Procediamo per verifica diretta:

- $0(f) = 0 \in \mathrm{End}(V)$, quindi $0 \in I(f)$
- Dati $p, q \in I(f)$, $(p+q)(f) = p(f) + q(f) = 0 + 0 = 0$, quindi $I(f)$ è chiuso per somma
- Dati $p \in I(f)$, $q \in \mathbb{K}[t]$, $(pq)(f) = p(f)q(f) = 0q(f) = 0$, quindi è chiuso per prodotto esterno.

($I(f) \neq \mathbb{K}[t]$) $1(f) = id \neq 0 \implies 1 \notin I(f)$.
($I(f) \neq \{0\}$) Osserviamo che $\{id_V, f, f^2, \cdots, f^{n^2}\} \subset \mathrm{End}(V)$ è un insieme linearmente dipendente perché contiene $n^2 + 1$ elementi appartenenti a uno spazio di dimensione n^2, dunque ne esiste una combinazione lineare non nulla tale che $\sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0$, quindi $0 \neq \sum_{i=0}^{n^2} a_i t^i \in I(f)$, ovvero $I(f) \neq \{0\}$. □

1.2 Definizione del Polinomio minimo

Definizione 1.6 (Polinomio minimo)**.**
Dato che tutti gli ideali di $\mathbb{K}[t]$ sono principali $\exists! \mu_f \in \mathbb{K}[t]$ monico non costate t.c. $I(f) = (\mu_f)$. Chiamiamo questo il *polinomio minimo* di f.

Osservazione 1.7.
La valutazione è definita in modo analogo per le matrici e seguendo lo stesso procedimento definiamo $\mathbb{K}[A]$, $I(A)$ e μ_A.

Come sempre possiamo convertire la forma in endomorfismo alla forma matriciale tramite la scelta di una base $\mathcal{B}$ di V e seguendo il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}[t] \arrow[dl, "val_f"'] \arrow[dr, "val_A"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathrm{End}(V) \arrow[rr, leftrightarrow, "M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}"'] & & M(n, \mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

Notiamo quindi che $\mathbb{K}[f] \cong \mathbb{K}[A]$ tramite $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e che $I(f) = I(A)$, da cui $\mu_f = \mu_A$.

Proposizione 1.8.
$\dim \mathbb{K}[f] = \deg \mu_f$.

Dimostrazione.
$$\dim \mathbb{K}[f] = \min\{k \mid \{id_v, f, \cdots, f^k\} \text{ lin.dip.}\} =$$
$$= \min\{\deg p \mid p(f) = 0, p \neq 0, p \in \mathbb{K}[t]\} = \min\{\deg p \mid p \in I(f)\} = \deg \mu_f$$
□

1.2.1 Polinomio minimo e coniugazione

Vediamo come si comportano la valutazione in endomorfismo e il polinomio minimo coniugando.

Proposizione 1.9.
$\forall h \in GL(V)$, $f \in \mathrm{End}(V)$, $f \mapsto hfh^{-1}$ *è un isomorfismo di anelli*

Dimostrazione.
$$h(f_1 + f_2)h^{-1} = hf_1h^{-1} + hf_2h^{-1}$$
$$hf_1f_2h^{-1} = hf_1h^{-1}hf_2h^{-1}$$
□

Osservazione 1.10.
La coniugazione rispetta le potenze di f

$$hf^kh^{-1} = (hfh^{-1})hf^{k-1}h^{-1} = \cdots = (hfh^{-1})^k$$

Insieme a quanto già osservato, troviamo che

$$\forall p \in \mathbb{K}[t], p(hfh^{-1}) = hp(f)h^{-1},$$

ovvero $\mathbb{K}[f] \cong \mathbb{K}[hfh^{-1}]$ e $I(f) = I(hfh^{-1})$, da cui

$$\mu_f = \mu_{hfh^{-1}},$$

quindi il polinomio minimo è invariante per coniugazione (e quindi per similitudine nel caso matriciale) indipendente dagli invarianti precedenti.

1.2.2 Teorema di Hamilton-Cayley

Cerchiamo il legame tra il polinomio minimo e il polinomio caratteristico:

Teorema 1.11 (Hamilton-Cayley)**.**
$p_f \in I(f)$, o equivalentemente $\mu_f \mid p_f$.

Dimostrazione. La tesi è equivalente a $p_f(f) = 0 \iff \ker p_f(f) = V$. Procediamo per casi:
Caso f triangolarizzabile) Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base che triangola f. Per quanto sappiamo sugli endomorfismi triangolarizzabili $\mathcal{B}$ è a ventaglio

$$M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico e valutiamo su f

$$p_f(t) = \det(tI_n - M) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n) \implies p_f(f) = (f - \lambda_1 id_V)\cdots(f-\lambda_n id_V).$$

Definiamo $W_i = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_i)$ (da cui $f(W_i) \subset W_i$). Osserviamo che $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ i sottospazi W_i sono $(f - \lambda id_V)$-invarianti. Siano $g_i = (f-\lambda_1 id_V)\cdots(f-\lambda_i id_V)$, da cui $g_n = p_f(f)$.

Per induzione su i, dimostriamo che $W_i \subset \ker g_i$ in modo tale che al termine dell'induzione avremo mostrato che $V = W_n \subset \ker p_f(f)$, da cui la tesi segue trivialmente dato che $\ker p_f(f) \subset V$.
($i = 1$) Essendo $\mathcal{B}$ una base a bandiera $\underline{v}_1$ è un autovettore di f con autovalore λ_1, quindi

$$g_1(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_1) - \lambda_1 \underline{v}_1 = \underline{0}.$$

($i > 1$) Per ipotesi induttiva abbiamo $W_{i-1} \subset \ker g_{i-1}$. Osserviamo che $W_i = W_{i-1} \oplus \operatorname{Span}(\underline{v}_i)$.

$$g_i(W_{i-1}) = g_{i-1} \circ (f - \lambda_i id_V)(W_{i-1}) \overset{f-inv.}{\subset} g_{i-1}(W_{i-1}) = \{\underline{0}\}.$$

Basta quindi verificare $g_i(\underline{v}_i) = \underline{0}$ e avremo $W_i \subset \ker g_i$.

$$f(\underline{v}_i) = \lambda_i \underline{v}_i + \underline{w} \quad \text{con } \underline{w} \in W_{i-1} \implies f(\underline{v}_i) - \lambda_i \underline{v}_i = \underline{w},$$

da cui

$$g_i(\underline{v}_i) = g_{i-1}(f - \lambda_i id_V)(\underline{v}_i) = g_{i-1}(\underline{w}) = \underline{0}.$$

Caso f non triangolarizzabile) Sia $\mathcal{K}$ il campo di spezzamento di p_f. Per una base $\mathcal{B}$ di V, sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. $A \in M(n, \mathbb{K}) \subset M(n, \mathcal{K})$. In questo nuovo spazio, A è triangolarizzabile, quindi applicando il caso precedente $p_A(A) = 0 \in M(n, \mathcal{K})$. Ma dato che $p_A(A) \in M(n, \mathbb{K})$, sappiamo che $p_A(A) = 0$ anche in $M(n, \mathbb{K})$, e quindi $p_f(f) = 0$. □

In realtà le corrispondenze con le estensioni di campi sono più profonde. Sia $\mathbb{F}$ un campo che estende $\mathbb{K}$. Data $A \in M(n, m, \mathbb{K})$ indichiamo $A_{\mathbb{F}}$ la sua immersione in $M(n, m, \mathbb{F})$.

Osservazione 1.12.
$\det A = \det A_{\mathbb{F}}$ in quanto calcolato unicamente tramite le operazioni di campo, che non ci permettono di uscire dalla copia di $\mathbb{K}$ in $\mathbb{F}$ quando calcoliamo $A_{\mathbb{F}}$. Abbiamo quindi:

$$\operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} A_{\mathbb{F}}, \quad p_A = p_{A_{\mathbb{F}}}.$$

Inoltre abbiamo che

$$A\underline{x} = \underline{y} \text{ ha soluzione} \iff A_{\mathbb{F}}\underline{x} = \underline{y}_{\mathbb{F}} \text{ ha soluzione,}$$

infatti le matrici complete coincidono, e quindi anche i loro ranghi, permettendoci di applicare Rouché-Capelli.

Proposizione 1.13.
$\mu_A = \mu_{A_{\mathbb{F}}}$

Dimostrazione. Sia $q \in I(A)$, da cui $q(A) = 0 \iff q_{\mathbb{F}}(A_{\mathbb{F}}) = 0$, quindi abbiamo $\mu_{A_{\mathbb{F}}} \mid (\mu_A)_{\mathbb{F}}$.
$\deg \mu_A = \min\{s \mid A^s + \sum_{i=1}^{s-1} a_i A^i = 0\}$, ma per quanto osservato

$$a_0 I + \cdots + a_{s-1}A^{s-1} + A^s = 0$$

ha soluzione in $\mathbb{K}$ se e solo se ha soluzione in $\mathbb{F}$, quindi $\deg \mu_A = \deg \mu_{A_{\mathbb{F}}}$. □

1.3 Fattori irriducibili del polinomio minimo

Esploriamo come si comporta il polinomio minimo rispetto allo spettro. Sia $\lambda \in sp(f)$, $\underline{v} \in V\backslash\{\underline{0}\}$ autovettore di f rispetto a λ. Notiamo che

$$f^k(\underline{v}) = \lambda^k \underline{v} \implies \forall p \in \mathbb{K}[t], p(f)(\underline{v}) = p(\lambda)\underline{v}.$$

Quindi se $p \in I(f)$, $\underline{0} = p(\lambda)\underline{v} \implies p(\lambda) = 0$

Osservazione 1.14.
$sp(f) \subset \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p\}\ \forall p \in I(f) \implies$

$$sp(f) \subset \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } \mu_f\} \subset \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p_f\} = sp(f)$$

quindi μ_f e p_f hanno le stesse radici in $\mathbb{K}$ che sono gli elementi di $sp(f)$.

Corollario 1.15.
Sia f triangolarizzabile

$$p_f(t) = \prod_{\lambda \in sp(f)} (t-\lambda)^{ma(\lambda,f)} \implies$$

$$\mu_f(t) = \prod_{\lambda \in sp(f)} (t-\lambda)^{n_\lambda} \quad \textit{con } 1 \leq n_\lambda \leq ma(\lambda, f).$$

La corrispondenza tra i fattori di p_f e μ_f vale in generale. Mostriamo alcuni risultati ausiliari.

Osservazione 1.16.
In generale vale $(g \circ f)|_W = g \circ f|_W = g|_{f(W)} \circ f_W$

Lemma 1.17.
Sia W un sottospazio di V $f-$invariante, allora $\mu_{f|_W} | \mu_f$

Dimostrazione. Ricordiamo che la restrizione a un sottospazio è lineare. Inoltre osserviamo che, dato che W è $f-$invariante, dalla osservazione precedente segue $(f|_W)^k = f^k|_W$. Otteniamo quindi che $\forall p \in \mathbb{K}[t]$ $p(f|_W) = p(f)|_W$. Ma allora

$$I(f|_W) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f|_W) = 0 \in \operatorname{End}(W)\} = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f)(W) = \{\underline{0}\}\} =$$

$$= \{p \in \mathbb{K}[t] \mid W \subset \ker p(f)\} \implies I(f) = (\mu_f) \subset I(f|_W) = (\mu_{f|_W}),$$

da cui la tesi. □

Osservazione 1.18.
Dato $\underline{v} \in V\backslash\{\underline{0}\}$, $\operatorname{Span}(\underline{v}, f(\underline{v}), \cdots) = \mathbb{K}[f](\underline{v})$ è $f-$invariante.

Lemma 1.19.
$\exists \mathcal{B}$ base di $W = \mathbb{K}[f](\underline{v})$ della forma $\mathcal{B} = \{\underline{v}, f(\underline{v}), \cdots, f^k(\underline{v})\}$ per qualche $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Dimostrazione. Dato che $\forall i \in \mathbb{N}\ f^i(\underline{v}) \in V, \dim V = n$, possiamo definire $k = \max\{i \in \mathbb{N} |\ \underline{v}, \cdots, f^i(\underline{v})$ linearmente indipenden
Dimostriamo che $\mathcal{B}$ della forma indicata è una base. Essendo linearmente indipendente basta mostrare che genera W. Mostriamo $\forall i \in \mathbb{N}$ che $f^{k+i}(\underline{v}) \in \operatorname{Span} \mathcal{B}$, da cui segue la tesi.
Per definizione di k, $\mathcal{B} \cup \{f^{k+i}(\underline{v})\}$ è linearmente dipendente, dunque esistono a_j non tutti nulli t.c.

$$\underline{0} = a_{k+1} f^{k+i}(\underline{v}) + \sum_{j=0}^{k} a_j f^j(\underline{v})$$

$a_{k+1} \neq 0$ perché $\mathcal{B}$ linearmente indipendente, dunque

$$f^{k+i}(\underline{v}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{-a_j}{a_{k+1}} f^j(\underline{v}) = \sum_{j=0}^{k} a'_j f^j(\underline{v})$$

□

Osservazione 1.20.
$\dim \mathbb{K}[t](\underline{v}) = 1 + \max\{i \in \mathbb{N} |\ \underline{v}, \cdots, f^i(\underline{v})$ lin.ind.$\}$

Lemma 1.21.
Sia $W = \mathbb{K}[f](\underline{v})$, allora $\mu_{f|_W} = p_{f|_W}$

Dimostrazione. $I(f|_W) = \{p \in \mathbb{K}(t) \mid p(f)(W) = \{\underline{0}\}\}$, quindi in particolare $p(f)(\underline{v}) = \underline{0}$, ma questa condizione basta a garantire $p(f)(W) = \{\underline{0}\}$, dunque $I(f|_W) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f)(\underline{v}) = \underline{0}\}$.

Osserviamo che $\forall p = \sum b_i t^i \in I(f|_W)$ t.c. $\deg p < k + 1 = \dim W$ abbiamo che $\sum b_i f^i(\underline{v}) = \underline{0}$. Essendo $\underline{v}, f(\underline{v}), \cdots, f^k(\underline{v})$ linearmente indipendenti, $b_i = 0$, da cui $p = 0$.

Dalla proposizione precedente sappiamo che $\exists a_j$ non tutti nulli t.c.

$$f^{k+1}(\underline{v}) = \sum_{j=0}^{k} a_j f^j(\underline{v}),$$

quindi $t^{k+1} - \sum_{j=0}^{k} a_j t^j \in I(f|_W)$. Questo polinomio è monico e per quanto detto è un polinomio di grado minimo non nullo appartenente a $I(f|_W)$, quindi esso è $\mu_{f|_W}$. Poiché $\mu_{f|_W} \mid p_{f|_W}$ per Hamilton Cayley (1.11) e hanno lo stesso grado, $\mu_{f|_W} = p_{f|_W}$. □

Lemma 1.22.
Sia $U \subset V$ un supplementare di $W = \mathbb{K}[f](\underline{v})$ e sia $g = \pi_U \circ f|_U \in \operatorname{End}(V)$ $\mu_g | \mu_f$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\pi_U \circ f \circ \pi_U = \pi_U \circ f$, infatti, essendo $\mathbb{K}[f](\underline{v})$ $f-$invariante,

$$\pi_U \circ f(\underline{v}) = \pi_U \circ f(\underline{u} + \underline{w}) = \pi_U \circ f(\underline{u}) + \cancelto{0}{\pi_U \circ f(\underline{w})} = \pi_U \circ f \circ \pi_U(\underline{v}).$$

Con questo notiamo $g^k = (\pi_U \circ f) \circ \cdots \circ \underbrace{\pi_U \circ f \circ \pi_U}_{=\pi_U \circ f} \circ f|_U = \cdots = \pi_U \circ f^k|_U$. Calcoliamo quindi $I(g) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(g) = \pi_U \circ p(f)|_U = 0 \in \operatorname{End}(U)\} = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f)(U) \subset \ker \pi_U\}$. Dato che $\ker \pi_U = W$ è $f-$invariante abbiamo

$$I(g) = \{p \mid p(f)(V) \subset W\} \supset \{p \mid p(f)(V) = \underline{0}\} = I(f) \implies \mu_g \mid \mu_f.$$

□

Proposizione 1.23.
I fattori irriducibili di p_f e μ_f sono gli stessi.

Dimostrazione. Sia $q \in \mathbb{K}[t]$ irriducibile.
Se $q \mid \mu_f$, poiché $\mu_f \mid p_f$ abbiamo $q \mid p_f$ come cercato.
Se $q \mid p_f$ mostriamo che $q \mid \mu_f$ per induzione su $n = \dim V$. Sia $\underline{v} \in V \backslash \{\underline{0}\}$, $W = \mathbb{K}[f](\underline{v})$, U t.c. $V = W \oplus U$, $g = \pi_U \circ f|_U$. Sia $\mathcal{C}$ una base di W e $\mathcal{D}$ una base di U. Abbiamo quindi $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ base di V.

$$M = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right), \quad A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f|_W), C = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(g).$$

Osserviamo quindi $p_f = p_M = p_A p_C = p_{f|_W} p_g$. Dato che $q \mid p_f$, essendo q irriducibile, $q \mid p_{f|_W}$ o $q \mid p_g$.
Se $q \mid p_{f|_W} = \mu_{f|_W} \mid \mu_f \implies q \mid \mu_f$. Se $q \mid p_g$, dato che $W \neq \{\underline{0}\} \implies \dim U < \dim V$, per ipotesi induttiva $p \mid \mu_g$ e per il lemma precedente $\mu_g \mid \mu_f \implies q \mid \mu_f$. □

Osservazione 1.24.
Dati $p_1, \cdots, p_k \in \mathbb{K}[t]\backslash\{0\}$ abbiamo trivialmente

$$\bigcap_{i=1}^{k}(p_i) = (\operatorname{mcm}(p_1, \cdots, p_k))$$

dato che il generatore deve essere multiplo di tutti i generatori e divide tutti i multipli comuni dei generatori.

Proposizione 1.25.
$V = W + U$, $W, U \subset V$ sottospazi $f-$invarianti, allora $\mu_f = \operatorname{mcm}(\mu_{f|_W}, \mu_{f|_U})$.

Dimostrazione. Sia $m = \operatorname{mcm}(\mu_{f|_W}, \mu_{f|_U})$. $\forall \underline{v} \in V$, $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$ con $\underline{w} \in W, \underline{u} \in U$, da cui $m(f)(\underline{v}) = m(f)(\underline{w}) + m(f)(\underline{u})$. Essendo m un multiplo di entrambi i polinomi minimi

$$m = p_1\mu_{f|_W} = p_2\mu_{f|_U} \implies$$

$$m(f)(\underline{v}) = p_1(f)\mu_{f|_W}(f)(\underline{w}) + p_2(f)\mu_{f|_U}(\underline{u}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}.$$

Allora $m \in I(f) \implies \mu_f \mid m$.
Da $\mu_{f|_W} \mid \mu_f$ e $\mu_{f|_U} \mid \mu_f$ troviamo anche $m \mid \mu_f$. □

Osservazione 1.26.
Se $q \in \mathbb{K}[t]$ è tale che $q|\mu_f$, q non costante e $q \neq \mu_f$, allora $\ker q(f) \neq \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione. $\mu_f = pq$, valutando su f abbiamo $0 = p(f)q(f)$. Se $\ker q(f) = \{\underline{0}\}$, essendo un endomorfismo è invertibile, dunque $p(f) = 0$, ma allora p che ha grado minore di μ_f sarebbe nell'ideale di f, assurdo per la minimalità di μ_f ↯ □

Osservazione 1.27.
$\forall q \in \mathbb{K}[t]$, $q(f)$ invertibile $\iff (q, \mu_f) = 1$.

Dimostrazione.
$\Longleftarrow$) Per Bezout $1 = pq + \mu_f r$, da cui $id = p(f)q(f) + \mu_f(f)r(f) = p(f)q(f) + 0 \circ r(f) = p(f)q(f)$. Allora $q(f) = p(f)^{-1}$, quindi $p(f)$ invertibile.
$\implies$) Sia $m = \operatorname{mcd}(p, \mu_f)$. $m|p \implies p = mp_1 \implies p(f) = p_1(f)m(f)$ Essendo $p(f)$ invertibile, $m(f)$ è iniettiva e quindi, essendo un endomorfismo, anche invertibile. Osserviamo anche che $\mu_f = mq_1$, da cui $0 = m(f)q_1(f)$. Dato che $m(f)$ è invertibile troviamo $q_1(f) = 0$, cioè $q_1 \in I(f)$, da cui $\mu_f|q_1$. Ma allora $q_1 = \mu_f$, e quindi $m = 1$. □

1.4 Endomorfismi ciclici

Definizione 1.28 (Endomorfismi e basi cicliche)**.**
f è *ciclico* se $\exists\mathcal{B}$ base di V della forma $\{\underline{v}, f(\underline{v}), \cdots, f^{n-1}(\underline{v})\}$.
Dalla definizione segue immediatamente che $f|_{\mathbb{K}[t](\underline{v})}$ è un endomorfismo ciclico.

Osservazione 1.29.
f è ciclico se e solo se $\exists\underline{v} \in V$ t.c. $\mathbb{K}[f](\underline{v}) = V$

Dimostrazione. Se $\mathbb{K}[f](\underline{v}) = V$ allora $f|_{\mathbb{K}[t](\underline{v})} = f|_V = f$ è ciclico.
Se $\forall\underline{v} \in V$ $\mathbb{K}[f](\underline{v}) \neq V$ $\{\underline{v}, f(\underline{v}), \cdots, f^{n-1}(\underline{v})\}$ non può essere una base di V, dato che $\{\underline{v}, f(\underline{v}), \cdots, f^{n-1}(\underline{v})\} \subset \mathbb{K}[f](\underline{v})$. □

1.4.1 Polinomio minimo relativo

Definiamo l'applicazione

$$val_{f,\underline{v}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[t] & \longrightarrow & V \\ p & \longmapsto & p(f)(\underline{v}) \end{array} = val_{\underline{v}} \circ val_f$$

e il suo nucleo

$$\ker val_{f,\underline{v}} = I(f, \underline{v}).$$

Osserviamo che $I(f, \underline{v})$ è un ideale di $\mathbb{K}[t]$, infatti presi $p \in \mathbb{K}[t]$ e $q \in I(f, \underline{v})$

$$(pq)(f)(\underline{v}) = (p(f)q(f))(\underline{v}) = p(f)(q(f)(\underline{v})) = p(f)(\underline{0}) = \underline{0}.$$

Definizione 1.30 (Polinomio minimo relativo)**.**
Sia $\mu_{f,\underline{v}}$ il generatore monico di $I(f,\underline{v})$. Esso viene chiamato il *polinomio minimo relativo* di f e $\underline{v}$.

Per quanto visto osserviamo che $I(f,\underline{v}) = I(f|_{\mathbb{K}[t](\underline{v})})$. Sia $\mu_{f,\underline{v}} = \mu_{f|_{\mathbb{K}[f](\underline{v})}}$ il polinomio minimo relativo di f e $\underline{v}$.

Osservazione 1.31.
$\mu_{f,\underline{v}} \mid \mu_f$, infatti $\forall \underline{v} \in V$ abbiamo

$$\mu_f(f) = 0 \implies \mu_f(f)(\underline{v}) = \underline{0} \implies \mu_f \in I(f,\underline{v}) \implies \mu_{f,\underline{v}} \mid \mu_f.$$

Proposizione 1.32.
Dato $S = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_k\}$ di generatori di V abbiamo

$$\mu_f = \operatorname{mcm}(\mu_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in S)$$

Dimostrazione. Sia $m = \operatorname{mcm}(\mu_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in S)$. Poiché $\mu_{f,\underline{v}} \mid \mu_f$, μ_f è un multiplo comune degli elementi di S, quindi $m \mid \mu_f$.
Per $\underline{v} \in S$ abbiamo $\mu_{f,\underline{v}} \mid m$, quindi $m \in I(f,\underline{v})$. Essendo S un insieme di generatori $\forall \underline{w} \in V$ abbiamo $\underline{w} = \sum_{i=1}^{k} a_i \underline{v}_i$, da cui

$$m(f)(\underline{w}) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(f)(\underline{v}_i) = \underline{0} \implies m \in I(f) \iff \mu_f | m.$$

La tesi segue quindi per divisibilità reciproca di polinomi monici. □

1.4.2 Caratterizzazione dei ciclici

Vogliamo dimostrare che $\exists \underline{v} \in V$ t.c. $\mu_{f,\underline{v}} = \mu_f$. Seguono due lemmi utili a ciò.

Lemma 1.33.
Dato $\underline{v} \in V$, supponiamo $\mu_{f,\underline{v}} = p_1 p_2$ polinomi monici coprimi. Ponendo $\underline{w}_1 = p_1(f)(\underline{v})$ e $\underline{w}_2 = p_2(f)(\underline{v})$ abbiamo $\mu_{f,\underline{w}_1} = p_2$ e $\mu_{f,\underline{w}_2} = p_1$.

Dimostrazione. Per simmetria basta mostrare la tesi per $\underline{w}_1$.
$\underline{\mu_{f,\underline{w}_1} \mid p_2)}$ Questo è equivalente a $p_2 \in I(f,\underline{w}_1)$.

$$p_2(f)(\underline{w}_1) = p_2(f)(p_1(f)(\underline{v})) = (p_2(f)p_1(f))(\underline{v}) = \mu_{f,\underline{v}}(f)(\underline{v}) = \underline{0}$$

$\underline{p_2 \mid \mu_{f,\underline{w}_1})}$ Per Bezout $1 = h_1 p_1 + h_2 p_2$, da cui

$$\underline{v} = h_1(f)(p_1(f)(\underline{v})) + h_2(f)(p_2(f)(\underline{v})) = h_1(f)(\underline{w}_1) + p_2(f)(h_2(f)(\underline{v}))$$

Applicando $(\mu_{f,\underline{w}_1} p_1)(f)$ a entrambi i membri troviamo

$$(\mu_{f,\underline{w}_1} p_1)(f)(\underline{v}) = (p_1 h_1)(f)(\mu_{f,\underline{w}_1})(f)(\underline{w}_1) + (h_2)(f)\underbrace{(p_1 p_2)}_{=\mu_{f,\underline{v}}}(f)(\underline{v}) = \underline{0} + \underline{0}$$

quindi $\mu_{f,\underline{w}_1} p_1 \in I(f,\underline{v})$. Allora $p_1 p_2 = \mu_{f,\underline{v}} | \mu_{f,\underline{w}_1} p_1 \iff p_2 | \mu_{f,\underline{w}_1}$, da cui la tesi. □

Lemma 1.34.
$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ $\exists \underline{z} \in V$ *t.c.* $\mu_{f,\underline{z}} = \operatorname{mcm}(\mu_{f,\underline{v}}, \mu_{f,\underline{w}})$.

Dimostrazione. Fattorizziamo $\mu_{f,\underline{v}}$ e $\mu_{f,\underline{w}}$ in irriducibili

$$\mu_{f,\underline{v}} = \prod p^{m_p}, \qquad \mu_{f,\underline{w}} = \prod p^{n_p}.$$

Separiamo i fattori del minimo comune multiplo definendo

$$P_1 = \prod_{m_p \geq n_p} p^{m_p}, \qquad Q_1 = \prod_{m_p < n_p} p^{n_p}$$

e prendiamo gli altri fattori definendo

$$P_2 = \frac{\mu_{f,\underline{v}}}{P_1}, \qquad Q_2 = \frac{\mu_{f,\underline{w}}}{Q_1}.$$

Abbiamo quindi

$$\operatorname{mcm}(\mu_{f,\underline{v}}, \mu_{f,\underline{w}}) = P_1 Q_1$$
$$(P_1, Q_1) = (P_1, P_2) = (Q_1, Q_2) = (P_2, Q_2) = 1.$$

Poniamo $\underline{z} = P_2(f)(\underline{v}) + Q_2(f)(\underline{w})$.
Osserviamo che $\mu_{f,\underline{z}} \mid P_1 Q_1$, infatti

$$(P_1 Q_1)(f)(\underline{z}) = (Q_1)(f)(P_1 P_2)(f)(\underline{v}) + (P_1)(f)(Q_1 Q_2)(f)(\underline{w}) = \underline{0}.$$

Scriviamo ora $P_2(f)(\underline{v}) = \underline{z} - Q_2(f)(\underline{w})$. Osserviamo che $\mu_{f,P_2(f)(\underline{v})} \mid \mu_{f,\underline{z}} Q_1$, infatti

$$\mu_{f,\underline{z}} Q_1(f)(P_2(f)(\underline{v})) = (Q_1)(f)(\mu_{f,\underline{z}})(f)(\underline{z}) - (\mu_{f,\underline{z}})(f)(Q_1 Q_2)(f)(\underline{w}) = \underline{0}.$$

Per il lemma di prima $\mu_{f,P_2(f)(\underline{v})} = P_1$, quindi $P_1 \mid \mu_{f,\underline{z}} Q_1$, e dato che P_1 e Q_1 sono coprimi abbiamo $P_1 \mid \mu_{f,\underline{z}}$. Isolando l'altro addendo troviamo analogamente $Q_1 \mid \mu_{f,\underline{z}}$, da cui $P_1 Q_1 \mid \mu_{f,\underline{z}}$ e concludiamo per divisibilità reciproca. □

Proposizione 1.35.
$\forall f \in \operatorname{End}(V)\ \exists \underline{v} \in V$ *t.c.* $\mu_{f,\underline{v}} = \mu_f$

Dimostrazione. Siano $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_m$ generatori di V. Per induzione troviamo reiterando il lemma precedente che $\forall i\ \exists \underline{z}_i \in V$ t.c. $\mu_{f,\underline{z}_i} = \operatorname{mcm}(\mu_{f,\underline{v}_1}, \cdots, \mu_{f,\underline{v}_i}) = \mu_f$. Allora $\underline{v} = \underline{z}_m$ è un generatore della forma cercata. □

Proposizione 1.36.
$\mu_f = p_f \iff f$ *ciclico*

Dimostrazione. Per il lemma 1.21 f ciclico $\implies \mu_f = p_f$. Mostriamo che $\mu_f = p_f \implies f$ ciclico. $\exists \underline{v} \in V$ t.c. $\mu_{f|_{\mathbb{K}[f](\underline{v})}} = \mu_f = p_f$, allora $\dim \mathbb{K}[f](\underline{v}) = \deg \mu_{f|_{\mathbb{K}[f](\underline{v})}} = \deg p_f = \dim V$ e data l'inclusione ovvia troviamo $\mathbb{K}[f](\underline{v}) = V \iff f$ ciclico. □

Esibiamo una seconda dimostrazione di questo fatto, valida però solo nel caso $\mathbb{K}$ sia un campo infinito.

Dimostrazione. Sia $S = \{\mu_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in V \backslash \{\underline{0}\}\} \subset \{\text{divisori di } \mu_f\} \implies S$ è finito. Siano $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_k \in \mathbb{K}[f](\underline{v}) = W$ t.c.

$$S = \{\mu_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_k\}\}$$

Osserviamo che $\forall \underline{v} \in V\ \exists j$ t.c. $\mu_{f,\underline{v}_j} = \mu_{f,\underline{v}}$, perciò

$$\mu_{f,\underline{v}_j}(f)(\underline{v}) = \mu_{f,\underline{v}}(f)(\underline{v}) = \underline{0} \implies \underline{v} \in \ker \mu_{f,\underline{v}_j}(f)$$

Allora abbiamo

$$V = \bigcup_{i=1}^{k} \ker \mu_{f,\underline{v}_i}(f),$$

ma essendo $\mathbb{K}$ infinito, V non è unione di finiti sottospazi propri, quindi $\exists j$ t.c. $V = \ker \mu_{f,\underline{v}_j}(f)$. Abbiamo ricavato quindi che $\mu_f \mid \mu_{f,\underline{v}_j}$, ma dato che $\mu_{f,\underline{v}_j} \mid \mu_f$ e che per ipotesi $p_f = \mu_f$ abbiamo che $p_f = \mu_f = \mu_{f,\underline{v}_j}$. Sappiamo che $\deg p_f = \dim V$, quindi

$$\deg \mu_{f,\underline{v}_j} = \dim V \implies \mathbb{K}[f](\underline{v}_j) = V,$$

ovvero f è ciclico con generatore della base $\underline{v}_j$. □

Osservazione 1.37.
Se f è ciclico e $\mathcal{B}$ è la base ciclica generata da $\underline{v}$, abbiamo

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Con $f^n(\underline{v}) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(\underline{v})$. Da questa forma possiamo sviluppare il determinate e trovare che $p_f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$.
Definiamo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ la *matrice compagna* di p_f.

Capitolo 2

Forma Normale di Jordan

2.1 Decomposizione primaria Canonica

Teorema 2.1 (Teorema di Decomposizione Primaria)**.**
Siano $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[t]$ *coprimi. Allora* $\ker(p_1p_2)(f) = \ker p_1(f) \oplus \ker p_2(f)$.

Dimostrazione. $\operatorname{mcd}(p_1, p_2) = 1 \overset{Bezout}{\Longrightarrow} 1 = q_1p_1 + q_2p_2$. Valutiamo su f e poi in $\underline{v} \in V$

$$id = q_1(f)p_1(f) + q_2(f)p_2(f) \in \operatorname{End}(V)$$

$$\underline{v} = \underbrace{q_1(f)(p_1(f)(\underline{v}))}_{\in \ker p_2(f)?} + \underbrace{q_2(f)(p_2(f)(\underline{v}))}_{\in \ker p_1(f)?}$$

Dimostriamo che se $\underline{v} \in \ker(p_1p_2(f))$ abbiamo $q_1(f)(p_1(f)(\underline{v})) \in \ker(p_2(f))$ e $q_2(f)(p_2(f)(\underline{v})) \in \ker(p_1(f))$:

$$p_2(f)(q_1(f)(p_1(f)(\underline{v}))) = q_1(f)(p_1(f)p_2(f)(\underline{v})) = q_1(f)(\underbrace{(p_1p_2)(f)(\underline{v})}_{\underline{v} \in \ker(p_1p_2)(f)}) = \underline{0}$$

Analogamente $p_1(f)(q_2(f)(p_2(f)(\underline{v}))) = \underline{0}$, quindi abbiamo dimostrato

$$\ker(p_1p_2)(f) = \ker p_1(f) + \ker p_2(f)$$

Sia ora $\underline{v} \in \ker p_1(f) \cap \ker p_2(f)$

$$\underline{v} = q_1(f)(\underbrace{p_1(f)(\underline{v})}_{\underline{v} \in \ker p_1(f)}) + q_2(f)(\underbrace{p_2(f)(\underline{v})}_{\underline{v} \in \ker p_2(f)}) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

□

Corollario 2.2.
Siano $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[t]$ *coprimi. Allora* $\operatorname{Imm}(p_1p_2)(f) = \operatorname{Imm} p_1(f) \cap \operatorname{Imm} p_2(f)$.

Dimostrazione. Mostriamo un doppio contenimento:
$\subset$) $p_2(f)(p_1(f)(\underline{v})) \in \operatorname{Imm} p_2(f)$, analogamente per $\operatorname{Imm} p_1(f)$.
$\supset$) Consideriamo come sopra la decomposizione data dalla identità di Bezout

$$\underline{v} = q_1(f)(p_1(f)(\underline{v})) + q_2(f)(p_2(f)(\underline{v})).$$

Se $\underline{v} \in \operatorname{Imm} p_1(f) \cap \operatorname{Imm} p_2(f)$ allora $\exists \underline{w}_1, \underline{w}_2$ t.c. $\underline{v} = p_1(f)(\underline{w}_1) = p_2(f)(\underline{w}_2)$. Allora

$$\underline{v} = q_1(f)(p_1(f)p_2(\underline{w}_2)) + q_2(f)(p_2(f)p_1(f)(\underline{w}_1)) = p_1p_2(f)(q_1(f)(\underline{w}_2) + q_2(f)(\underline{w}_1)) \in \operatorname{Imm} p_1p_2(f).$$

□

Corollario 2.3.
Siano $p_1, \cdots, p_k \in \mathbb{K}[t]$ *coprimi due a due, allora*

$$\ker\left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right)(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker p_i(f)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\prod_{i=1}^{k} p_i = p_1 \prod_{i=2}^{k} p_i$ e $\operatorname{mcd}(p_1, p_2 \cdots p_k) = 1$. Dalla decomposizione primaria abbiamo quindi

$$\ker(p_1 p_2 \cdots p_k)(f) = \ker p_1(f) \oplus \ker(p_2 \cdots p_k)(f).$$

Reiterando questo processo abbiamo la tesi. □

Corollario 2.4.
Dati $p_1, \cdots, p_k \in \mathbb{K}[t]$ coprimi tali che $p_1 \cdots p_k \in I(f)$ allora $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker p_i(f)$. Chiamiamo questa una decomposizione primaria di V in spazi $f-$invarianti.

2.1.1 Decomposizione primaria canonica

Una decomposizione in somma diretta dove un addendo è $\{\underline{0}\}$ però contiene addendi superflui, cerchiamo di identificare quando questo si verifica.

$$\ker p(f) = \{\underline{0}\} \iff p(f) \text{ invertibile } \iff \operatorname{mcd}(p, \mu_f) = 1$$

Allora possiamo per esempio prendere come decomposizioni di V quelle indotte dalla fattorizzazione di p_f o μ_f, dato che il nucleo della loro valutazione in f è V e i loro fattori irriducibili dividono μ_f

Definizione 2.5 (Decomposizione primaria canonica di V)**.**
Siano le fattorizzazioni di p_f e μ_f irriducibili come segue

$$p_f = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i}, \qquad \mu_f = \prod_{i=0}^{k} p_i^{r_i},$$

allora definiamo

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker p_i(f)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker p_i(f)^{r_i}$$

la *decomposizione primaria canonica* di V. Troveremo infatti che queste decomposizioni coincidono mostrando che $\ker p_i(f)^{m_i} = \ker p_i(f)^{r_i}$.

Lemma 2.6.
Osserviamo che $\forall f \in \operatorname{End}(V)$ $\exists k_0$ t.c.:

$$\{\underline{0}\} = \ker f^0 \subsetneq \ker f \subsetneq \ker f^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker f^{k_0} = \ker f^{k_0+1} = \cdots$$

Dimostrazione. Dato che $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^{k+1} = f \circ f^k$, $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$, ovvero la successione dei nuclei è crescente, ma limitata da V. Infatti per il contenimento mostrato $\dim \ker f^k \leq \dim \ker f^{k+1} \leq \dim V \in \mathbb{N}$. Esiste dunque $\bar{k}$ t.c. $\ker f^{\bar{k}} = \ker f^{\bar{k}+1}$. Sia dunque $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker f^k = \ker f^{k+1}\}$. Quindi prima di k_0 abbiamo una successione di contenimenti stretti, la tesi equivale a mostrare allora che $\forall h \in \mathbb{N}$ $\ker f^{k_0} = \ker f^{k_0+h}$. Procediamo per induzione su h:
$h = 1$) deriva dalla definizione di k_0
$h > 1$) Sia $\underline{v} \in \ker f^{k_0+h}$, allora $\underline{0} = f^{k_0+h}(\underline{v}) = f^{k_0+h-1}(f(\underline{v}))$, da cui $f(\underline{v}) \in \ker f^{k_0+h-1} = \ker f^{k_0}$, ovvero $\underline{v} \in \ker f^{k_0+1} = \ker f^{k_0} \implies \ker f^{k_0+h} \subset \ker f^{k_0}$. L'altra inclusione è ovvia, quindi $\ker f^{k_0+h} = \ker f^{k_0}$. □

Osservazione 2.7.
Dalla formula sulle dimensioni di nucleo e immagine e dati i successivi contenimenti abbiamo che l'analoga successione

$$V = \operatorname{Imm} f^0 \supsetneq \operatorname{Imm} f \supsetneq \operatorname{Imm} f^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{Imm} f^{k_0} = \operatorname{Imm} f^{k_0+1} = \cdots$$

si stabilizza allo stesso indice k_0.

Proposizione 2.8.
Ponendo $p_f = \prod_{i=1}^{k} p_1^{m_i}$ e $\mu_f = \prod_{i=0}^{k} p_1^{r_i}$ le fattorizzazioni in irriducibili, abbiamo $\ker p_i(f)^{m_i} = \ker p_i(f)^{r_i}$.

Dimostrazione. Per comodità poniamo $W_i = \ker p_i(f)^{m_i}$ e $U_i = \ker p_i(f)^{r_i}$. Banalmente riscontriamo $U_i \subset W_i$, quindi basta confrontare le dimensioni. Dato che $\dim U_1 \leq \dim W_i$ dal contenimento e che

$$V = \bigoplus_{i=0}^{k} U_i = \bigoplus_{i=0}^{k} W_i \implies n = \sum_{i=1}^{k} \dim U_i \leq \sum_{i=1}^{k} \dim W_i = n$$

otteniamo che $\forall i$ $\dim U_i = \dim W_i$, da cui la tesi. □

Osservazione 2.9.
Dato $p \in \mathbb{K}[t]$ irriducibile, siano k l'indice al quale la successione dei nuclei per $p(f)$ si stabilizza, ovvero

$$\{\underline{0}\} = \ker p(f)^0 \subsetneq \ker p(f) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker p(f)^k = \cdots$$

e d la molteplicità di p nella fattorizzazione di μ_f, ovvero $\mu_f = p^d q$ con $p \not| q$. Allora abbiamo $d = k$.

Dimostrazione. Procediamo per casi:
$d < k$) Avremmo $\ker p(f)^d \subsetneq \ker p(f)^k$. Per decomposizione $V = \ker p(f)^d \oplus \ker q(f)$, da cui per la formula di Grassmann $\ker p(f)^k \cap \ker q(f) \neq \{\underline{0}\}$, da cui avremmo $\operatorname{mcd}(p^k, q) \neq 1$, assurdo per definizione di d ↯
$d > k$) La successione in d è già stabile, in particolare $\ker p(f)^d = \ker p(f)^k$. Dalla decomposizione primaria abbiamo quindi

$$V = \ker p(f)^d \oplus \ker q(f) = \ker p(f)^k \oplus \ker q(f)$$

Allora $p^k q \in I(f)$, dato che $\forall V \underline{v} \in V$ $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}$ con $\underline{w} \in \ker p(f)^k$ e $\underline{u} \in \ker q(f)$ e

$$p^k q(f)(\underline{v}) = p^k(f)q(f)(\underline{w} + \underline{u}) = q(f)p^k(f)(\underline{w}) + p^k(f)q(f)(\underline{u}) = \underline{0} + \underline{0}.$$

Ma questo contraddice le ipotesi, infatti $\deg p^k q = k \deg p + \deg q < d \deg p + \deg q = \deg p^d q = \deg \mu_f$ ↯
L'unica possibilità è dunque $d = k$. □

Corollario 2.10.
r_i è l'indice al quale la catena di contenimenti dei nuclei per $p_i(f)$ si stabilizza.

2.1.2 Decomposizione di Fitting

Dato il comportamento delle successioni dei nuclei e immagini ci piacerebbe decomporre V in modo da isolare il sottospazio che rimane invariato alla fine della catena. Più precisamente cerchiamo una decomposizione di V in spazi $f-$invarianti dove reiterando f uno spazio si azzera all'indice dove le successioni si stabilizzano e l'altro resta invariato. Il primo comportamento corrisponde ad avere f nilpotente sulla restrizione:

Definizione 2.11 (Endomorfismo nilpotente)**.**
$h \in \operatorname{End}(W)$ è nilpotente se $\exists k > 0$ t.c. $h^k = 0$. Osserviamo che $\mu_h | t^k$, da cui $\mu_h = t^r$. Otteniamo quindi che $p_h = t^m$ con $m = \dim W$ e che $sp(h) = \{0\}$. $r = \min\{k \mid h^k = 0\}$ è detto indice di nilpotenza.

Cerchiamo quindi due spazi W, U tali che $V = W \oplus U$ e prese $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U$ basi di W e U abbiamo

$$M^{\mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_U}_{\mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_U}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

con A nilpotente e B invertibile.

Definizione 2.12 (Decomposizione di Fitting)**.**
Data $f \in \operatorname{End}(V)$ $\exists W, U$ sottospazi $f-$invarianti di V t.c. $V = W \oplus U$, $f|_W$ è nilpotente e $f|_U$ è invertibile

Proposizione 2.13.
La decomposizione di Fitting esiste per ogni endomorfismo ed è unica.

Dimostrazione. Sia k l'indice al quale le successioni dei nuclei e delle immagini per f si stabilizzano.
Esistenza)
Siano $W = \ker f^k$ e $U = \operatorname{Imm} f^k$.
($\star$) Chiaramente $(f|_W)^k = f^k|_W = 0$, quindi $f|_W$ è nilpotente.
($\star$) Essendo k l'indice dove le immagini si stabilizzano $f(U) = f(\operatorname{Imm} f^k) = \operatorname{Imm} f^{k+1} = \operatorname{Imm} f^k = U$, allora $f|_U$ è un endomorfismo surgettivo e quindi invertibile.
($\star$) Sia $\underline{v} \in W \cap U$. Essendo in U abbiamo $f^k(\underline{w}) = \underline{v}$ per qualche $\underline{w}$. Essendo anche in W abbiamo $\underline{0} = f^k(\underline{v}) = f^{2k}(\underline{w})$. Allora $\underline{w} \in \ker f^{2k} = \ker f^k$, quindi $\underline{0} = f^k(\underline{w}) = \underline{v}$, ovvero $W \cap U = \{\underline{0}\}$.
($\star$) $\dim W \oplus U = \dim W + \dim U = \dim \ker f^k + \dim \operatorname{Imm} f^k = \dim V$. Abbiamo il contenimento ovvio $W \oplus U \subset V$, quindi possiamo concludere che $W \oplus U = V$.
Unicità)
Sia adesso $V = W' \oplus U'$ una seconda decomposizione di Fitting. $f|_{U'}$ è invertibile, quindi $f^k(U') = U'$, ovvero $U' \subset \operatorname{Imm} f^k$.
Essendo $f|_{W'}$ nilpotente $\exists h$ minimo t.c. $f^h(W') = \{\underline{0}\}$.

$$W' \subset \ker f^h|_{W'} \subset \ker f^h \subseteq \ker f^k.$$

Dato che $W' \oplus U' = \ker f^k \oplus \operatorname{Imm} f^k$ e $W' \subset \ker f^k$ abbiamo che $\dim U' \geq \dim \operatorname{Imm} f^k$, ma siccome $U' \subset \operatorname{Imm} f^k$ abbiamo $U' = \operatorname{Imm} f^k$. Per un ragionamento analogo $W' = \ker f^k$. □

2.1.3 Polinomi minimi e caratteristici su decomposizione

Osserviamo ora come si comportano le restrizioni di f ai sottospazi della decomposizione canonica:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$$

Sia $g_i = f|_{W_i} = f|_{U_i}$. Da questa definizione segue $p_i^{r_i} \in I(g_i)$, da cui, $\mu_{g_i} \mid p_i^{r_i}$, quindi $\mu_{g_i} = p_i^{s_i}$ con $1 \leq s_i \leq r_i$.

Segue trivialmente che $\mu_{g_1}, \cdots, \mu_{g_k}$ sono coprimi due a due, ma allora, osservando che $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ abbiamo che

$$\mu_f = \operatorname{mcm}(\mu_{g_1}, \cdots, \mu_{g_k}) = \mu_{g_1} \cdots \mu_{g_k}$$

da cui $s_i = r_i$.

Passando al polinomio caratteristico abbiamo appena scoperto che $p_{g_i} = p_i^{n_i}$ con $n_i \geq r_i$. Ma dato che il polinomio caratteristico è il prodotto di polinomi caratteristici passando a complementari $f-$invarianti

$$p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = p_f = p_{g_1} \cdots p_{g_k} = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

da cui $n_i = m_i$.

Studiamo il caso in cui f è triangolarizzabile, ovvero

$$p_f = \prod_{\lambda \in sp(f)} (t-\lambda)^{m_\lambda}, \qquad \mu_f = \prod_{\lambda \in sp(f)} (t-\lambda)^{r_\lambda}$$

La decomposizione primaria canonica in questo caso è

$$V = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} \ker(f - \lambda id_V)^{m_\lambda} = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} \ker(f - \lambda id_V)^{r_\lambda}$$

Definizione 2.14.
Sia $V'_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id_V)^{m_\lambda} = \ker(f - \lambda id_V)^{r_\lambda}$ l'autospazio generalizzato di f relativo a λ. Osserviamo che $V_\lambda(f) \subset V'_\lambda(f)$.

Osservazione 2.15.
Sappiamo che $\mu_{f|_{V'_\lambda(f)}} = (t-\lambda)^{r_\lambda}$ e che $p_{f|_{V'_\lambda(f)}} = (t-\lambda)^{m_\lambda}$, da cui $\dim V'_\lambda(f) = m_\lambda = ma(\lambda, f)$.

Osserviamo che queste definizioni ci permettono di dare un nuovo criterio per la diagonalizzabilità

Proposizione 2.16.
f è diagonalizzabile se e solo se μ_f è completamente fattorizzabile e ha solo radici di molteplicità 1.

Dimostrazione.
$(\implies)$ f diagonalizzabile è equivalente a $V = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} V_\lambda(f)$, quindi

$$\mu_f = \operatorname{mcm}\left(\mu_{f|_{V_\lambda(f)}} \mid \lambda \in Sp(f)\right).$$

Dato che $f|_{V_\lambda(f)} = \lambda id_{V_\lambda(f)}$ abbiamo che $\mu_{f|_{V_\lambda(f)}} = t - \lambda$, quindi

$$\mu_f = \operatorname{mcm}\left(\mu_{f|_{V_\lambda(f)}} \mid \lambda \in Sp(f)\right) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (t-\lambda).$$

$(\impliedby)$

$$\mu_f = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (t-\lambda) \implies V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \ker(f - \lambda id_V) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} V_\lambda(f)$$

ovvero f è diagonalizzabile. □

Corollario 2.17.
Troviamo una dimostrazione più concisa del fatto che la diagonalizzabilità passa a sottospazi $f-$invarianti. Infatti se il polinomio minimo di f ha solo radici di molteplicità 1, anche il polinomio minimo di f ristretta, che lo divide, ha radici di molteplicità 1.

2.2 Forma Normale di Jordan

2.2.1 Stringhe invarianti e definizione

Osserviamo che dati f, g endomorfismi coniugati tramite h ($gh = hf$), allora $\forall \lambda \in sp(f) = sp(g)$ abbiamo

$$(g - \lambda id_V)^s h = h(f - \lambda id_V)^s \implies \ker(g - \lambda id_V)^s = h \ker(f - \lambda id_V)^s.$$

Allora la dimensione di $\ker(f - \lambda id_V)^s$ è invariante per coniugazione.

Organizziamo queste dimensioni in una stringa come segue:

Definizione 2.18 (Stringa Invariante)**.**
Sia $\forall j \leq r_\lambda(f)$ $d_j(\lambda, f) = \dim \ker(f - \lambda id_V)^j$, da cui definiamo

$$D_\lambda(f) = (d_1(\lambda, f), d_2(\lambda, f), \cdots, d_{r_\lambda(f)}(\lambda, f))$$

la stringa invariante di f relativa a λ.

Osservazione 2.19.
Da ciò che sappiamo sulle successioni di nuclei, abbiamo $0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{r_\lambda}$

Effettivamente scopriamo che lo spettro e l'insieme delle stringhe invarianti al variare di λ nello spettro sono un invariante completo per gli endomorfismi triangolabili. Mostreremo questo fatto osservando che esiste una base per la quale la matrice associata ad f ha una forma che dipende unicamente dallo spettro e dalle stringhe invarianti. Questa forma è la Forma normale di Jordan (fnJ).

Definizione 2.20 (Forma normale di Jordan)**.**
Una matrice J è nella forma normale di Jordan se è diagonale a blocchi

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2, k_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J(\lambda_s, k_s) \end{pmatrix}$$

dove ogni blocco è della forma

$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M(k, \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}.$$

La fnJ è triangolare superiore. Una base in cui la matrice associata a f è una fnJ è detta base di Jordan per f. Vedremo che a meno di permutare i blocchi la fnJ è unica dato l'endomorfismo.

2.2.2 fnJ è un invariante completo per le triangolabili

Osserviamo che dati W_i sottospazi di V $f-$invarianti tali che $V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$ la matrice associata a f tramite $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ dove $\mathcal{B}_i$ è base di W_i è diagonale a blocchi con

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = diag(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(f|_{W_1}), \cdots, M_{\mathcal{B}_k}^{\mathcal{B}_k}(f|_{W_k}))$$

Quindi se troviamo una forma normale di Jordan per ogni restrizione di f agli addendi della decomposizione l'avremo trovata per l'endomorfismo completo. Nel caso degli endomorfismi triangolabili la scelta più naturale è la decomposizione primaria canonica in autospazi generalizzati, in questo modo possiamo considerare restrizioni con un unico autovalore.

Consideriamo allora W $sv/\mathbb{K}$ con $\dim W = m$, $g \in \mathrm{End}(W)$ t.c. $sp(g) = \{\lambda\}$ e $p_g(t) = (t - \lambda)^m$, da cui $\mu_g(t) = (t - \lambda)^r$.

Osserviamo che possiamo restringerci al caso di endomorfismi nilpotenti. Infatti ponendo $h = g - \lambda id_W$ esso è nilpotente (con indice di nilpotenza r) e dato che $\forall \mathcal{B}$ base di W

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(h) + \lambda I_m,$$

trovando una forma normale di Jordan per h l'avremo trovata anche per g. Data la definizione di h osserviamo che $D_\lambda(g) = D_0(h)$.

Possiamo quindi supporre g nilpotente, ovvero $sp(g) = \{0\}$, $p_g(t) = t^m$, $\mu_g(t) = t^r$. Per alleggerire la notazione scriviamo $d_i = d_i(0, g)$, da cui la stringa invariante di g relativa a 0 è $D = (d_1, \cdots, d_r)$.

La fnJ per g quindi, se esiste, è della forma

$$J = diag(J(0, k_1), \cdots, J(0, k_s)) \quad \text{con} \sum_{i=1}^{s} k_i = m,$$

che è unica ordinando i blocchi per taglia crescente, ovvero con $k_1 \geq \cdots \geq k_s$.

Vogliamo mostrare che ogni endomorfismo nilpotente ammette una base di Jordan e che la fnJ non dipende dalla base scelta, dato che deve essere interamente determinata da D.

Proposizione 2.21.
Sia W sv/$\mathbb{K}$, $g \in \operatorname{End}(W)$ nilpotente con $\dim W = m$, $sp(g) = \{0\}$, $p_g(t) = t^m$, $\mu_g = t^r$. Allora esiste una base di Jordan per g e la risultante fnJ dipende unicamente da D.

Esistenza. Osserviamo che per $r = 1$, $g = 0$, dunque la sua matrice associata in qualsiasi base è quella nulla, che è una fnJ. Se invece $r = m$, abbiamo che $\mu_g = p_g$, quindi g è ciclico ed esiste una base ciclica $\mathcal{B}$ tramite la quale

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = J(0, m)^\top$$

Ma allora, se $\mathcal{B} = \{\underline{v}, g(\underline{v}), \cdots, g^{r-1}(\underline{v})\}$, sia $\overline{\mathcal{B}} = \{g^{r-1}(\underline{v}), g^{r-2}(\underline{v}), \cdots, \underline{v}\}$, da cui

$$M^{\overline{\mathcal{B}}}_{\overline{\mathcal{B}}}(g) = J(0, m)$$

quindi $\overline{\mathcal{B}}$ è una base di Jordan per g.

Quanto detto ci mostra che un endomorfismo ciclico ammette base di Jordan e la sua fnJ è un singolo blocco. Osserviamo che vale anche il contrario, ovvero se la fnJ di un endomorfismo è un blocco di Jordan allora l'endomorfismo è ciclico e la base ciclica è la base di Jordan letta al contrario. Quindi abbiamo che

$$\exists \mathcal{B} \text{ base di Jordan per } g \iff \exists \underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_k \in W \ t.c.\ W = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{K}[g](\underline{w}_i)$$

Dato che $g^{r-1} \neq 0$, sia $\underline{w} \in W$ t.c. $g^{r-1}(\underline{w}) \neq \underline{0}$. Sia $U = \mathbb{K}[g](\underline{w})$. Se mostriamo che $\exists Z$ sottospazio di W $g-$invariante tale che $U \oplus Z = W$ avremo decomposto W in uno spazio dove la restrizione di g è ciclica e in un altro spazio di dimensione minore dove valgono ipotesi analoghe a quelle di W ($g|_Z \in \operatorname{End}(Z)$ nilpotente). Quindi reiterando questo processo un numero finito di volte avremo completamente decomposto W in sottospazi dove le restrizioni di g sono cicliche.

Mostriamo allora per induzione su r che è sempre possibile compiere questa decomposizione.

$r = 1$) Come detto, in questo caso $g = 0$, quindi ogni sottospazio di W è $g-$invariante, da cui ogni supplementare di U è un valido Z.

$r > 1$) Esplicitiamo l'ipotesi induttiva: Sia $h \in \operatorname{End}(W)$ t.c. $\mu_h = t^{r-1}$, allora esiste un supplementare $h-$invariante per ogni sottospazio di W che ammette una base ciclica per h.

Osserviamo che $\mu_{g|_{\operatorname{Imm} g}} = t^{r-1}$, infatti $g^r = g^{r-1} \circ g = 0$ ma $\underline{v} = g(\underline{w})$ è un vettore tale che $g^{r-2}(\underline{v}) = g^{r-1}(\underline{w}) \neq \underline{0}$.

Consideriamo $\mathbb{K}[g](g(\underline{w})) = g(U) \subset \operatorname{Imm} g$: questo è un sottospazio di $\operatorname{Imm} g$ che ammette base ciclica per $g|_{\operatorname{Imm} g}$, quindi per ipotesi induttiva

$$\operatorname{Imm} g = g(U) \oplus Z_0 \qquad \text{con } Z_0 \ g-\text{invariante}.$$

Sia $Z_1 = g^{-1}(Z_0)$. Dalla $g-$invarianza di Z_0 abbiamo $g(Z_0) \subset Z_0 \implies Z_0 \subset Z_1$. Mostriamo quindi una serie di lemma:

1. $W = U + Z_1$:
   ($\supset$) ovvio. ($\subset$) Sia $\underline{v} \in W$, dato che $\operatorname{Imm} g = g(U) \oplus Z_0$ abbiamo $g(\underline{v}) = g(\underline{u}) + \underline{z}_0 \implies \underline{z}_0 = g(\underline{v} - \underline{u}) \implies \underline{v} - \underline{u} = \underline{z}_1 \in Z_1 \implies \underline{v} = \underline{u} + \underline{z}_1$ come voluto.

2. $U \cap \operatorname{Imm} g = g(U)$:
   ($\supset$) ovvio. ($\subset$) osservo che $\dim g(U) = \dim U - 1$, dato che le loro basi coincidono eccetto per la presenza o meno di $\underline{w} \notin g(U)$. Quindi se la tesi non valesse, dato che $\dim g(U) \leq \dim U \cap \operatorname{Imm} g$, avremmo $U \cap \operatorname{Imm} g = U$, quindi $\underline{w} \in \operatorname{Imm} g$, ma questo è assurdo perché altrimenti avremmo $g(\underline{v}) = \underline{w} \implies g^{r-1}(\underline{w}) = g^r(\underline{v}) = \underline{0}$ ↯

3. $U \cap Z_0 = \{\underline{0}\}$:
   $Z_0 \subset \operatorname{Imm} g$, $U \cap Z_0 = U \cap \operatorname{Imm} g \cap Z_0 = g(U) \cap Z_0 = \{\underline{0}\}$.

Siamo pronti per definire lo Z cercato. Sia $\mathcal{D}$ una base di U e $\mathcal{B}_0$ una base di Z_0. Dato che $Z_0 \subset Z_1$ e che $W = U + Z_1$ completiamo $\mathcal{D} \cup \mathcal{B}_0$ a base di W con vettori di Z_1, ottenendo $\mathcal{D} \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$. Sia $Z = \operatorname{Span}(\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1)$. Osserviamo che $Z_0 \subset Z \subset Z_1$ e che $W = U \oplus Z$. Osserviamo infine che $g(Z) \subset g(Z_1) = Z_0 \subset Z$, quindi Z è $g-$invariante.

Quindi Z è un supplementare di U $g-$invariante. □

Unicità. Supponiamo l'esistenza della della fnJ J per g. Abbiamo

$$J = diag(J(0, k_1), \cdots, J(0, k_s)) \quad \text{con} \sum_{i=1}^{s} k_i = m$$

quindi la fnJ è univocamente determinata dagli interi $k_1 \geq \cdots \geq k_s$. Per comodità definiamo $b_h = |\{j \in \mathbb{N}_s \mid k_j = h\}|$. La stringa $B = (b_1, \cdots, b_m)$ determina univocamente la fnJ in quanto $k_j = \min\{h \in \mathbb{N} \mid j \leq \sum_{i=1}^{h} b_i\}$.

Mostriamo quindi che B è univocamente determinata da D.

Osserviamo che $d_i = \dim \ker g^i = \dim \ker J^i$ e che

$$J(0,k)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J(0, k-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$J(0,k)^i = \begin{pmatrix} 0 & J(0, k-i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per $k > i$, mentre per $i \geq k$ abbiamo $J(0,k)^i = 0$. Otteniamo quindi che $\operatorname{rnk} J(0,k)^i = \max(0, k-i)$.

$$J = diag(J(0,k_1), \cdots, J(0,k_s)) \implies J^i = diag(J(0,k_1)^i, \cdots, J(0,k_s)^i),$$

da cui

$$\operatorname{rnk} J^i = \sum_{j=1}^{s} \max(0, k_j - i).$$

Dato che ogni blocco di una data taglia ha lo stesso comportamento abbiamo anche

$$\operatorname{rnk} J^i = \sum_{j=1}^{m} b_j \max(0, j - i).$$

Dalla formula nucleo-immagine abbiamo

$$d_i = m - \sum_{j=1}^{m} b_j \max(0, j-i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \min(j, i)$$

Eliminiamo il termine m prendendo la differenza tra termini successivi:

$$d_i - d_{i-1} = \sum_{j=1}^{m} b_j \max(0, j - i + 1) - \sum_{j=1}^{m} b_j \max(0, j-i) = \sum_{j \geq i} b_j,$$

dove l'ultima somma è finita, dato che $\forall j > m$, $b_j = 0$. Possiamo quindi ricavare b_i da D come segue

$$b_i = \sum_{j \geq i} b_j - \sum_{j \geq i+1} b_j = d_i - d_{i-1} - (d_{i+1} - d_i) = 2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}.$$

Abbiamo quindi trovato che B dipende univocamente da D e quindi abbiamo trovato che J dipende univocamente da D. □

Corollario 2.22.
J contiene almeno un blocco di taglia r, infatti

$$b_r = 2d_r - d_{r-1} - d_{r+1} = 2m - d_{r-1} - m = m - d_{r-1} \neq 0 \text{ dato che } d_{r-1} < d_r$$

Teorema 2.23 (Classificazione degli endomorfismi triangolabili a meno di coniugazione)**.**
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Lo spettro e le stringhe invarianti sono un invariante completo per la relazione di coniugazione sugli endomorfismi triangolabili. Questo invariante determina in modo univoco la forma normale di Jordan di ogni endomorfismo, la quale è unica a meno di permutare gli autovalori.

Dimostrazione. Per quanto affermato, la forma normale di Jordan è univocamente determinata dalle $\dim \ker(f|V'_\lambda(f) - \lambda id_{V'_\lambda(f)})^i$. Dato che $\ker(f - \lambda id_V)^i \subset V'_\lambda(f)$ abbiamo che $\ker(f - \lambda id_V)^i = \ker(f|_{V'_\lambda(f)} - id_{V'_\lambda(f)})^i$.
Consideriamo quindi $\lambda \in sp(f)$: abbiamo che $D_\lambda(f)$ determina la fnJ per $f|_{V'_\lambda(f)}$, quindi considerando le stringhe invarianti su tutto lo spettro avremo determinato l'intera forma normale di Jordan per f. □

2.2.3 Costruzione Basi di Jordan

La dimostrazione proposta però non è costruttiva e non ci permette di ricavare una base di Jordan. Come in precedenza ci restringiamo al caso nilpotente

Sia quindi $g \in \mathrm{End}(W)$ nilpotente con indice di nilpotenza k. Abbiamo equivalentemente $\mu_g(t) = t^k$. Come affermato k è l'indice al quale la successione dei nuclei si stabilizza ed essendo g nilpotente $W = \ker g^k$

$$W = \ker g^k = \ker g^{k-1} \oplus U_1$$

con U_1 un supplementare di $\ker g^{k-1}$. Dato che prima di k la successione dei nuclei è crescente $\ker g^{k-1} \neq \ker g^k$, e quindi $U_1 \neq \{\underline{0}\}$.

Scomponiamo $\ker g^{k-1}$ come segue

$$\ker g^{k-1} = \ker g^{k-2} \oplus g(U_1) \oplus U_2,$$

con U_2 un supplementare. Questo deriva dai seguenti fatti:

- $U_1 \subset \ker g^k \implies g(U_1) \subset \ker g^{k-1}$.
- $g(U_1) \cap \ker g^{k-2} = \{\underline{0}\}$, infatti $\forall \underline{u} \in U_1$ $\underline{u} \notin \ker g^{k-1}$, quindi $g(\underline{u}) \notin \ker g^{k-2}$.

Osserviamo che $g|_{U_1}$ è iniettiva, infatti

$$U_1 \cap \ker g \subset \ker g \subset \ker g^{k-1} \implies U_1 \cap \ker g \subset U_1 \cap \ker g^{k-1} = \{\underline{0}\}.$$

Osserviamo infine che $g(g(U_1) \oplus U_2) = g^2(U_1) \oplus g(U_2)$, infatti

$$g(g(U_1) \oplus U_2) \subset g^2(U_1) + g(U_2)$$

ed essendo $g|_{g(U_1)\oplus U_2}$ iniettiva[1] abbiamo

$$\begin{aligned}\dim g(g(U_1) \oplus U_2) &= \dim g(U_1) \oplus U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 \geq \\ &\geq \dim g^2(U_1) + \dim g(U_2) \geq \dim(g^2(U_1) + g(U_2)).\end{aligned}$$

Applicando questo ragionamento ripetutamente possiamo decomporre i nuclei:

$$\begin{aligned} W = \ker g^k &= \ker g^{k-1} \oplus U_1 \\ \ker g^{k-1} &= \ker g^{k-2} \oplus g(U_1) \oplus U_2 \\ \ker g^{k-2} &= \ker g^{k-3} \oplus g^2(U_1) \oplus g(U_2) \oplus U_3 \\ &\vdots \\ \ker g &= g^{k-1}(U_1) \oplus g^{k-2}(U_2) \oplus \cdots \oplus g(U_{k-1}) \oplus U_k. \end{aligned}$$

Scrivendo quanto sopra in forma compatta troviamo

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{k-i} g^j(U_i).$$

[1] $g(U_1) \oplus U_2 \cap \ker g \subset \ker g \subset \ker g^{k-2} \implies g(U_1) \oplus U_2 \cap \ker g \subset g(U_1) \oplus U_2 \cap \ker g^{k-2} = \{\underline{0}\}$.

Siano allora $\mathcal{B}_i$ delle basi per gli U_i. Osserviamo quindi che

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\underline{v} \in \mathcal{B}_i} \{g^{k-i}(\underline{v}), g^{k-i-1}(\underline{v}), \cdots, \underline{v}\} \doteq \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{\underline{v} \in \mathcal{B}_i} W_{\underline{v}}$$

è una base di W [2], inoltre $g|_{\mathrm{Span}\,(W_{\underline{v}})}$ ammette base ciclica, $W_{\underline{v}}$ stessa letta al contrario. Essendo l'unico autovalore in questione 0 abbiamo che $W_{\underline{v}}$ è una base di Jordan per un singolo blocco, da cui $\mathcal{B}$, essendo una unione ordinata di basi di Jordan è a sua volta una base di Jordan per W come cercato.

2.3 Centralizzatori

Definizione 2.24 (Centralizzatore)**.**
Data una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ definiamo il centralizzatore di A come

$$C(A) = \{M \in M(n, \mathbb{K}) \mid MA = AM\}$$

Valgono le seguenti proprietà trivialmente

- $C(A)$ è un sottospazio
- $A \in C(B) \iff B \in C(A)$
- $\lambda I \in C(A)\ \forall A, \lambda$
- $A^k \in C(A)$
- $\mathbb{K}[A] \subseteq C(A)$
- $C(A) = C(A - \lambda I)$

[2] i vettori rimangono indipendenti perché g è iniettiva su tutti i supplementari di $\ker g^j$ in $\ker g$

Capitolo 3

La forma normale di Jordan reale

Essendo $\mathbb{C}$ algebricamente chiuso, ogni polinomio a coefficienti complessi è completamente fattorizzabile, quindi ogni polinomio caratteristico di un endomorfismo su uno spazio vettoriale a dimensione finita su $\mathbb{C}$ è completamente fattorizzabile, ovvero ogni endomorfismo è triangolabile.

$\mathbb{C}$ è una estensione di $\mathbb{R}$, quindi possiamo cercare un modo per classificare gli endomorfismi reali a meno di isomorfismo.

Proposizione 3.1.
Date $A, B \in M(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{C})$ abbiamo

$$\exists P \in GL(n, \mathbb{R}) : \; PAP^{-1} = B \Longleftrightarrow \exists Q \in GL(n, \mathbb{C}) : \; QAQ^{-1} = B$$

Dimostrazione. $\Longrightarrow$) ovvio, basta prendere $Q = P$ immersa nelle matrici a coefficienti complessi.
$\Longleftarrow$) Separiamo le parti reali e immaginarie delle entrate di Q in modo tale che $Q = R + iS$ con $R, S \in M(n, \mathbb{R})$.

Dato che $QA = BQ$ abbiamo $RA = BR$ e $SA = BS$, quindi $\forall r \in \mathbb{R}$ abbiamo $(R + rS)A = B(R + rS)$, quindi se troviamo $r \in \mathbb{R}$ tale che $R + rS \in GL(n, \mathbb{R})$ la tesi segue. Definiamo allora $p(t) = \det(R + tS) \in \mathbb{R}[t] (\subset \mathbb{C}[t])$. Chiaramente $p \neq 0$ su $\mathbb{C}$, dato che $t = i$ non è una soluzione, dunque $p \neq 0$ anche su $\mathbb{R}$, allora $\exists r \in \mathbb{R}$ tale che r non è una soluzione di p (tato che ha un numero finito di radici). Allora $R + rS$ è invertibile. $\square$

Allora $A \sim B \iff fnJ_{\mathbb{C}}(A) = fnJ_{\mathbb{C}}(B)$, quindi la forma normale di Jordan fatta sui complessi è un invariante completo per similitudine per le matrici reali.

3.1 Complessificato di uno spazio sui reali

Possiamo pensare a $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munito di un prodotto complesso. Proviamo a generalizzare questa interpretatione

Definizione 3.2 (Complessificato di uno spazio vettoriale)**.**
Sia V $sv/\mathbb{R}$ con $\dim V = n$. Consideriamo $V \times V$ mantenendo la somma e definiamo il seguente prodotto per scalari complesso

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times (V \times V) & \longrightarrow & V \times V \\ (a + bi, (\underline{v}, \underline{w})) & \longmapsto & (a\underline{v} - b\underline{w}, b\underline{v} + a\underline{w}) \end{array}$$

Allora $V \times V$ munito con questo prodotto per scalari è uno $sv/\mathbb{C}$ detto il *complessificato* di V e indicato con $V_{\mathbb{C}}$.
Con un leggero abuso notazionale indicheremo la coppia $(\underline{v}, \underline{w}) \in V_{\mathbb{C}}$ con $\underline{v} + i\underline{w}$. Sempre nello spirito di questa notazione identifichiamo $V \times \{\underline{0}\}$ con V e indichiamo $\{\underline{0}\} \times V$ con iV. Abbiamo quindi $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ come $sv/\mathbb{R}$.

Osservazione 3.3.
Restringere il prodotto per scalari di $V_{\mathbb{C}}$ a scalari reali restituisce l'usuale prodotto per scalari su V^2.

Possiamo definire un coniugio in modo analogo a $\mathbb{C}$

Definizione 3.4 (Coniugio)**.**
Sia $\bar{\cdot} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \underline{z} = \underline{v} + i\underline{w} \mapsto \overline{\underline{z}} = \underline{v} + i(-\underline{w}) \doteqdot \underline{v} - i\underline{w}$

Osserviamo che il coniugio rispetta la somma e il prodotto per scalari su $V \times V$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ma non è $\mathbb{C}-$lineare. Abbiamo quindi che $\bar{\cdot}$ è un isomorfismo di V^2 su $\mathbb{R}$ i cui autovalori sono ± 1, infatti notiamo facilmente che

$$V_1(\bar{\cdot}) = V \quad \text{e che} \quad V_{-1}(\bar{\cdot}) = iV$$

Definizione 3.5 (Base reale)**.**
Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base di V su $\mathbb{R}$. Allora l'immersione di $\mathcal{B}$ in $V_\mathbb{C}$ è una base di $V_\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$ e si dice *base reale* di $V_\mathbb{C}$.

Proposizione 3.6.
Una base reale è una base di $V_\mathbb{C}$*, quindi* $\dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C} = \dim_\mathbb{R} V$ *e* $\dim_\mathbb{R} V_\mathbb{C} = 2\dim_\mathbb{R} V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base di V. $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ abbiamo $\underline{v} = \sum a_j \underline{v}_j$ e $\underline{w} = \sum b_j \underline{v}_j$, quindi $\underline{v} + i\underline{w} = \sum (a_j + ib_j)\underline{v}_j$, ovvero $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori.

Cosideriamo allora una combinazione lineare complessa nulla degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$\underline{0} + i\underline{0} = \sum (a_j + ib_j)\underline{v}_j = \sum a_j \underline{v}_j + i \sum b_j \underline{v}_j$$

quindi segue che $\sum a_j \underline{v}_j = \sum b_j \underline{v}_j = \underline{0}$, e per l'indipendenza lineare di $\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}$ abbiamo $a_j = b_j = 0$, da cui la combinazione iniziale era quella nulla, da cui $\mathcal{B}$ linearmente indipendente su $\mathbb{C}$. $\square$

3.2 Complessificazione di un endomorfismo

Definizione 3.7 (Complessificato di un endomorfismo)**.**
Sia $f \in \mathrm{End}(V)$, allora possiamo definire $f_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V_\mathbb{C})$ il *complessificato* di f come

$$f_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + if(\underline{w}).$$

Una conseguenza immediata è che $f_\mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$ lineare e che $f_\mathbb{C}|_V = f$. Osserviamo inoltre che $f_\mathbb{C}$ è un omomorfismo di anelli tra $\mathrm{End}(V)$ e $\mathrm{End}(V_\mathbb{C})$.

Osservazione 3.8.

$$\ker f_\mathbb{C} = \{\underline{v} + i\underline{w} \mid f(\underline{v}) + if(\underline{w}) = \underline{0} + i\underline{0}\} = \{\underline{v} + i\underline{w} \mid \underline{v}, \underline{w} \in \ker f\} = (\ker f)_\mathbb{C}$$

Osservazione 3.9.

$$f_\mathbb{C}(\overline{\underline{z}}) = f(\underline{v}) - if(\underline{w}) = \overline{f_\mathbb{C}(\underline{z})}$$

Sia $\overline{f_\mathbb{C}} = \overline{\cdot} \circ f_\mathbb{C}$, la quale non è $\mathbb{C}-$lineare, ma è $\mathbb{R}-$lineare e $\ker \overline{f_\mathbb{C}} = \overline{\ker f_\mathbb{C}}$.

Osservazione 3.10.
Sia $\mathcal{B}$ una base reale di $V_\mathbb{C}$, allora

$$M(n, \mathbb{R}) \ni M^\mathcal{B}_\mathcal{B}(f) = M^\mathcal{B}_\mathcal{B}(f_\mathbb{C})$$

dato che le immagini di $f_\mathbb{C}$ per la restrizione a V coincidono con quelle di f. Ma allora $p_f = p_{f_\mathbb{C}} \in \mathbb{R}[t]$, quindi $f \sim g \iff f_\mathbb{C} \sim g_\mathbb{C}$ per quanto detto circa le matrici a coefficienti reali coniugate su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

3.3 Forma normale reale

Abbiamo quindi che la fnJ complessa è un invariante completo per coniugazione degli endomorfismi reali, ma noi cerchiamo una forma normale reale.

Per quanto sappiamo sulla fattorizzazione dei polinomi a coefficienti reali, $p_{f_\mathbb{C}}$ si fattorizza in $\mathbb{C}$ nelle radici $R \cup U \cup \overline{U}$ dove $R \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ e $\overline{U} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in U\}$, da cui

$$\mathbb{R}[t] \ni p_{f_\mathbb{C}} = \prod_{\lambda \in R} (t - \lambda)^{m_\lambda} \prod_{\alpha \in U} (t - \alpha)^{n_\alpha} (t - \overline{\alpha})^{n_\alpha}$$

e quindi, ponendo $q_\alpha = t^2 - 2\Re(\alpha) + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[t]$

$$p_f = \prod_{\lambda \in R} (t - \lambda)^{m_\lambda} \prod_{\alpha \in U} q_\alpha^{n_\alpha}.$$

Abbiamo quindi le seguenti decomposizioni canoniche di V e $V_\mathbb{C}$

$$V_\mathbb{C} = (\bigoplus_{\lambda \in R} \underbrace{\ker(f_\mathbb{C} - \lambda id_{V_\mathbb{C}})^{m_\lambda}}_{=\widetilde{W}_\lambda}) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in U} (\underbrace{\ker(f_\mathbb{C} - \alpha id_{V_\mathbb{C}})^{n_\alpha}}_{=U_\alpha} \oplus \underbrace{\ker(f_\mathbb{C} - \overline{\alpha} id_{V_\mathbb{C}})^{n_\alpha}}_{=\hat{U}_\alpha}))$$

$$V = (\bigoplus_{\lambda \in R} \underbrace{\ker(f - \lambda id_V)^{m_\lambda}}_{=W_\lambda}) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in U} \underbrace{\ker q_\alpha(f)^{n_\alpha}}_{=Z_\alpha})$$

Osserviamo che $(f - \lambda id_V)_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{C}} - \lambda id_{V_{\mathbb{C}}}$, e quindi essendo $f_{\mathbb{C}}$ un omomorfismo di Anelli abbiamo $(f - \lambda id_V)^s_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}} - \lambda id_{V_{\mathbb{C}}})^s$.

Dato che $\operatorname{mcd}(t - \alpha, t - \overline{\alpha}) = 1$ abbiamo per decomposizione primaria $(Z_\alpha)_{\mathbb{C}} = U_\alpha \oplus \hat{U}_\alpha$, da cui

$$f_{\mathbb{C}}|_{U_\alpha \oplus \hat{U}_\alpha} = (f|_{Z_\alpha})_{\mathbb{C}}.$$

Osserviamo che data $\{\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_k\}$ base di U_α abbiamo $\{\overline{\underline{z}}_1, \cdots, \overline{\underline{z}}_k\}$ base di $\hat{U}_\alpha$, infatti $\overline{(f_{\mathbb{C}} - \alpha id_{V_{\mathbb{C}}})(\underline{z})} = (f_{\mathbb{C}} - \overline{\alpha} id_{V_{\mathbb{C}}})(\overline{\underline{z}})$ e lo stesso vale per le potenze. Abbiamo quindi $\hat{U}_\alpha = \overline{U}_\alpha$.

Possiamo quindi restringere la nostra indagine ai seguenti casi:

1. W $sv/\mathbb{R}$ con $\dim W = n$, $g \in \operatorname{End}(W)$, $g_{\mathbb{C}} \in \operatorname{End}(W_{\mathbb{C}})$ tale che $p_g = p_{g_{\mathbb{C}}} = (t - \lambda)^m$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Z $sv/\mathbb{R}$ con $\dim Z = 2n$, $g \in \operatorname{End}(Z)$, $g_{\mathbb{C}} \in \operatorname{End}(Z_{\mathbb{C}})$ tale che $p_g = q_\alpha^n$, $p_{g_{\mathbb{C}}} = (t - \alpha)^n (t - \overline{\alpha})^n$ con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Nel primo caso g è triangolabile e quindi abbiamo una base di Jordan reale, infatti troviamo $fnJ(g) = fnJ(g_{\mathbb{C}})$.

Consideriamo quindi il secondo caso. g non triangolabile su $\mathbb{R}$ ($sp(g) = \emptyset$). Per decomposizione primaria $Z_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$ con $U = V'_\alpha(g_{\mathbb{C}})$ e $\overline{U} = V'_{\overline{\alpha}}(g_{\mathbb{C}})$.

Osservazione 3.11.
Data $\mathcal{B}$ base di U di Jordan per $g_{\mathbb{C}}|_U$. Allora $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{\underline{z}} \mid \underline{z} \in \mathcal{B}\}$ è una base di $\overline{U}$ di Jordan per $g_{\mathbb{C}}|_{\overline{U}}$ e le fnJ differiscono solo per gli autovalori, ovvero le stringhe invarianti sono le stesse.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_n\}$ e quindi $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{\underline{z}}_1, \cdots, \overline{\underline{z}}_n\}$. Dato che $\mathcal{B}$ è di Jordan abbiamo due possibilità: Se $\underline{z}_i$ è un autovettore allora $g_{\mathbb{C}}(\underline{z}_i) = \alpha \underline{z}_i$. Se $\underline{z}$ non è un autovettore, per come è formata la fnJ abbiamo $g_{\mathbb{C}}(\underline{z}_i) = \alpha \underline{z}_i + \underline{z}_{i-1}$.

Coniughiamo ora queste relazioni, trovando nel primo caso $g_{\mathbb{C}}(\overline{\underline{z}}_i) = \overline{g_{\mathbb{C}}(\underline{z}_i)} = \overline{\alpha \underline{z}_i}$, cioè $\overline{\underline{z}}_i$ autovettore con autovalore $\overline{\alpha}$, e nel secondo $g_{\mathbb{C}}(\overline{\underline{z}}_i) = \overline{\alpha \underline{z}_i} + \overline{\underline{z}}_{i-1}$. In entrambi i casi vediamo che manteniamo la forma normale di Jordan ma trasformando α in $\overline{\alpha}$. □

Definendo quindi $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B} \cup \overline{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ base di U abbiamo una base di $Z_{\mathbb{C}}$ di Jordan per $g_{\mathbb{C}}$. Riordinando i blocchi abbiamo

$$fnJ(g_{\mathbb{C}}) = diag(J(\alpha, k_1), J(\overline{\alpha}, k_1), J(\alpha, k_2), J(\overline{\alpha}, k_2), \cdots, J(\alpha, k_s), J(\overline{\alpha}, k_s)).$$

Nella nostra ricerca per la forma normale reale possiamo quindi restringerci al caso $J = diag(J(\alpha, n), J(\overline{\alpha}, n))$. Se $\mathcal{B} = \{\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_n\}$ è una base di Jordan per U ($\mathcal{B} \cup \overline{\mathcal{B}}$ base di $Z_{\mathbb{C}}$) allora sia $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{\Re(\underline{z}_1), \Im(\underline{z}_1), \cdots, \Im(\underline{z}_n)\}$. Dato che $\operatorname{Span}(\underline{z}_i, \overline{\underline{z}}_i) = \operatorname{Span}(\Re(\underline{z}_i), \Im(\underline{z}_i))$ abbiamo che $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ è una base di Jordan reale di $Z_{\mathbb{C}}$ per $g_{\mathbb{C}}$, e quindi è una base di Jordan di Z per g. È una base perchè genera e contiene $2n$ elementi.

Rappresentiamo quindi le matrici associate:

$$M^{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}(g_{\mathbb{C}}) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{matrix} & \Large 0 \\ \Large 0 & \begin{matrix} \overline{\alpha} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \overline{\alpha} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\alpha} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}(g) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \Re(\alpha) & \Im(\alpha) \\ -\Im(\alpha) & \Re(\alpha) \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \begin{matrix} \Re(\alpha) & \Im(\alpha) \\ -\Im(\alpha) & \Re(\alpha) \end{matrix} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \begin{matrix} \Re(\alpha) & \Im(\alpha) \\ -\Im(\alpha) & \Re(\alpha) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Possiamo leggere questa matrice in modo più semplice come l'esplosione di $J(\alpha, n)$ o $J(\overline{\alpha}, n)$, dove per esplosione indichiamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} M(a,b,\mathbb{C}) & \longrightarrow & M(2a,2b,\mathbb{R}) \\ (z_{ij})_{\substack{i=1\dots a \\ j=1\dots b}} & \longmapsto & (\chi_{2\mathbb{N}}(i+j)\Re(z_{\frac{i}{2}\frac{j}{2}}) + (\chi_{2\mathbb{N}}(i+j)-1)^{\chi_{2\mathbb{N}}(i)}\Im(z_{\frac{i}{2}\frac{j}{2}}))_{\substack{i=1\dots 2a \\ j=1\dots 2b}} \end{array}$$

ovvero a z sostituiamo $\begin{smallmatrix} \Re(z) & \Im(z) \\ -\Im(z) & \Re(z) \end{smallmatrix}$.

Mettendo tutto insieme, dato $f \in \operatorname{End}(V)$ con V $sv/\mathbb{R}$ possiamo definire la forma normale di Jordan reale univocamente determinata a meno di scambiare i blocchi o considerare il coniugato di alcuni autovalori. Per gli autovalori reali abbiamo i blocchi di Jordan, mentre per gli autovalori complessi esplodiamo metà dei loro blocchi. La forma normale reale è determinata univocamente a meno delle simmetrie esposte dalla forma normale di Jordan complessa per l'endomorfismo in questione, quindi la fnJR è un invariante completo per coniugazione tra gli endomorfismi reali.

Capitolo 4

Prodotti Scalari

4.1 Forme bilineari

Dati V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ abbiamo $Bil(V \times W, \mathbb{K})$ l'insieme delle forme bilineari, ovvero le mappe $\varphi : V \times W \to \mathbb{K}$ che sono lineari su entrambi gli argomenti.

Definizione 4.1 (Omomorfismi di rappresentazione)**.**
Data $\varphi \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$ definiamo gli *omomorfismi di rappresentazione*, sinistro e destro rispettivamente, come

$$F_{\varphi_s} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W^* \\ \underline{v} & \longmapsto & \varphi(\underline{v}, \cdot) \end{array} \qquad F_{\varphi_d} : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V^* \\ \underline{w} & \longmapsto & \varphi(\cdot, \underline{w}) \end{array} .$$

Definizione 4.2 (Radicali destro e sinistro)**.**
Definiamo il *radicale destro/sinistro* il nucleo dell'omomorfismo di rappresentazione appropriato

$$\ker F_{\varphi_s} = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \cdot) = 0 \in W^*\} = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W\}$$

$$\ker F_{\varphi_s} = Rad_s(\varphi) \qquad \ker F_{\varphi_d} = Rad_d(\varphi)$$

Essendo nuclei di omomorfismi, i radicali sono sottospazi dei rispettivi ambienti.

Osservazione 4.3.
Dato $\underline{v} \in Rad_s(\varphi)$ abbiamo che $\forall \underline{w} \in W \ \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = F_{\varphi_d}(\underline{w})(\underline{v}) = 0$, quindi $\underline{v} \in \ker \varphi(\cdot, \underline{w}) \ \forall \underline{w} \in W$. Otteniamo quindi che

$$Rad_s(\varphi) = \bigcap_{\underline{w} \in W} \ker F_{\varphi_d}(\underline{w}) = Z(\mathrm{Imm}\, F_{\varphi_d})$$

dove $Z : W^* \to V$ indica il luogo di zeri. Analogamente $Rad_d(\varphi) = Z(\mathrm{Imm}\, F_{\varphi_s})$ con $Z : V^* \to W$ in questo caso.

Per il resto della trattazione sottontenderemo $\dim V = n \in \mathbb{N}$ e $\dim W = m \in \mathbb{N}$. Quando gli spazi hanno dimensione finita conosciamo l'inversa del luogo di zeri, ovvero l'annullatore

$$Ann(Rad_s(\varphi)) = \mathrm{Imm}\, F_{\varphi_d} \qquad Ann(Rad_d(\varphi)) = \mathrm{Imm}\, F_{\varphi_s}$$

Definizione 4.4 (Non degenere)**.**
Affermiamo che $\varphi \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$ è *non degenere a sinistra* se $Rad_s(\varphi) = \{\underline{0}\}$, analogamente per *non degenere a destra*. φ è non degenere se non lo è né a sinistra né a destra.

$$Rad_s(\varphi) = \{\underline{0}\} \iff F_{\varphi_d} \text{ iniettiva } \implies \dim V \leq \dim W$$

Quindi φ non degenere implica V e W isomorfi.

4.2 Rappresentazione matriciale

Definizione 4.5 (Matrice che rappresenta una bilineare)**.**
Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base di V, $\mathcal{D} = \{\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_m\}$ una base di W e $\varphi \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$. Allora sia

$$M_{\mathcal{BD}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j))_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}}$$

la *matrice associata* a φ/ che *rappresenta* φ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$.

Osservazione 4.6.
Dati $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in W$ abbiamo $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v}_i$ e $\underline{w} = \sum_{j=1}^{m} b_j \underline{w}_j$, da cui

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j)$$

Questa espressione ci ricorda il prodotto matriciale, e infatti abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{v}, \underline{w}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j) = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} M_{\mathcal{BD}}(\varphi) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{BD}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{D}}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi una mappa $M_{\mathcal{BD}} : Bil(V \times W, \mathbb{K}) \to M(n, m, \mathbb{K})$. Essa è lineare per come abbiamo definito la matrice associata ed è iniettiva per il fatto che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} \mathbf{0} [\underline{w}]_{\mathcal{D}} = 0$. Osserviamo che possiamo definirne una inversa esplicita

$$\begin{array}{ccc} M(n,m,\mathbb{K}) & \longrightarrow & Bil(V \times W, \mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & \varphi_M \end{array} \quad \text{con } \varphi_M = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M [\underline{w}]_{\mathcal{D}}$$

Infatti $M_{\mathcal{BD}}(\varphi_M) = (\underline{e}_i^{\top} M \underline{e}_j)_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} = (M_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}} = M$. Quindi $M_{\mathcal{BD}}$ è surgettiva, e dunque un isomorfismo per quanto detto. Troviamo allora che $\dim Bil(V \times W, \mathbb{K}) = \dim V \dim W$

Osservazione 4.7.
Nel caso $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}an_n$ e $\mathcal{D} = \mathcal{C}an_m$ abbiamo

$$M_{\mathcal{C}an\mathcal{C}an} : Bil(\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m, \mathbb{K}) \to M(n, m, \mathbb{K})$$

un isomorfismo canonico. Abbiamo quindi che ogni forma bilineare φ si scrive in modo unico come ϕ_A con $A \in M(n, m, \mathbb{K})$ e $\phi_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^{\top} A \underline{y}$. Ponendo allora $A = M_{\mathcal{BD}}(\varphi)$ troviamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\,]_{\mathcal{B}}\ [\,]_{\mathcal{D}}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \arrow[ur, "\phi_A"'] & \end{tikzcd}$$

Siano ora $\mathcal{B}'$ base di V e $\mathcal{D}'$ base di W, abbiamo

$$\begin{aligned}[\underline{v}]_{\mathcal{B}'}^{\top} M_{\mathcal{B}'\mathcal{D}'}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{D}'} &= \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{BD}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{D}} = \\ &= (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)[\underline{v}]_{\mathcal{B}'})^{\top} M_{\mathcal{BD}}(\varphi) (M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}'}(id_W)[\underline{w}]_{\mathcal{D}'}) = \\ &= [\underline{v}]_{\mathcal{B}'}^{\top} ((M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V))^{\top} M_{\mathcal{BD}}(\varphi) M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}'}(id_W)) [\underline{w}]_{\mathcal{D}'}.\end{aligned}$$

Quindi $M_{\mathcal{B}'\mathcal{D}'}(\varphi) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V))^{\top} M_{\mathcal{BD}}(\varphi) M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}'}(id_W)$, da cui

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{D}'}(\varphi) \sim_{SD} M_{\mathcal{BD}}(\varphi)$$

Definizione 4.8 (Rango di una forma bilineare)**.**
Definiamo $\operatorname{rnk} \varphi = \operatorname{rnk} M_{\mathcal{BD}}(\varphi)$ per $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{D}$ base di W qualsiasi.

Osservazione 4.9.
Ponendo per semplicità $A = M_{\mathcal{BD}}(\varphi)$ abbiamo

$$Rad_s(\varphi) \xrightarrow{[\,]_{\mathcal{B}}} \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{x}^{\top} A \underline{y} = 0 \ \forall \underline{y} \in \mathbb{K}^m\} =$$
$$= \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid \underline{x}^{\top} A = 0 \iff A^{\top} \underline{x} = 0\} = \ker A^{\top}$$
$$Rad_d(\varphi) \xrightarrow{[\,]_{\mathcal{D}}} \ker A,$$

da cui

$$\dim Rad_s(\varphi) = n - \operatorname{rnk} A^{\top} = \dim V - \operatorname{rnk} \varphi$$
$$\dim Rad_d(\varphi) = m - \operatorname{rnk} A = \dim W - \operatorname{rnk} \varphi.$$

Segue banalmente che φ è non degenere a sinistra se e solo se $\dim V = \operatorname{rnk} \varphi$ e analogamente è non degenere a destra se e solo se $\dim W = \operatorname{rnk} \varphi$. Quindi se $\dim V = \dim W$ abbiamo che φ non degenere è equivalente a non degenere a destra che è equivalente a non degenere a sinistra.

4.3 Cono isotropo, prodotto scalare e bilineari antisimmetriche

Consideriamo da ora in avanti il caso di $W = V$ e $\dim V = n$. Per alleggerire la notazione scriviamo $Bil(V \times V, \mathbb{K}) = Bil(V)$. Osserviamo che $\dim Rad_s(\varphi) = \dim Rad_d(\varphi) = n - \operatorname{rnk}\varphi$.

Definizione 4.10 (Cono isotropo)**.**
Data $\varphi \in Bil(V)$ chiamiamo *cono isotropo* di φ il seguente insieme

$$CI(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\}.$$

Chiamiamo gli elementi del cono isotropo vettori isotropi. Osserviamo che $Rad_s(\varphi) \subset CI(\varphi) \supset Rad_d(\varphi)$, ma esso non è in generale un sottospazio di V. Osserviamo che $CI(\varphi)$ è chiuso per prodotto per scalari e contiene $\underline{0}$.

Definizione 4.11 (Forma bilineare anisotropa)**.**
Una forma bilineare $\varphi \in Bil(V)$ è *anisotropa* se $CI(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

Osservazione 4.12.
Se φ è anisotropa allora è anche non degenere dato che $CI(\varphi)$ contiene i radicali.

Data $\mathcal{B}$ base di V abbiamo $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) \doteqdot M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n, \mathbb{K})$, quindi $M_{\mathcal{B}} : Bil(V) \to M(n, \mathbb{K})$ isomorfismo.

Osservazione 4.13.
$\varphi \in Bil(V)$ è non degenere se e solo se $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è invertibile dato che entrambe equivalgono a $\operatorname{rnk}\varphi = n$.

Dato che ora entrambi gli argomenti appartengono allo stesso spazio possiamo considerare cosa succede scambiando gli argomenti

Definizione 4.14 (Prodotto Scalare)**.**
$\varphi \in Bil(V)$ è simmetrica o *prodotto scalare* se

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}, \underline{v}).$$

Sia $PS(V)$ l'insieme dei *prodotti scalari* su V.

Definizione 4.15 (Bilineare antisimmetrica)**.**
$\varphi \in Bil(V)$ è *antisimmetrica* se

$$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = -\varphi(\underline{w}, \underline{v})$$

Sia $A(V)$ l'insieme delle *bilineari antisimmetriche* su V.

Definizione 4.16 (Bilineare alternante)**.**
Una forma bilineare $\varphi \in Bil(V)$ è *alternante* se

$$CI(\varphi) = V \iff \forall \underline{v} \in V, \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \underline{0}.$$

Sia $\Lambda^2(V)$ l'insieme delle *bilineari alternanti* su V.

Un esempio di prodotto scalare non degenere è l'applicazione $\langle\ ,\ \rangle = \phi_{I_n} \in Bil(\mathbb{K}^n)$, ovvero $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^\top \underline{y}$.

Osservazione 4.17.
$\varphi \in PS(\mathbb{K}^n) \iff \varphi = \phi_A$ con

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \quad \phi_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y} = \underline{y}^\top A \underline{x} = \phi_A(\underline{y}, \underline{x}) \iff A = A^\top,$$

ovvero A matrice simmetrica. Analogamente troviamo che $\varphi \in A(\mathbb{K}^n)$ se e solo se $\varphi = \phi_A$ con A antisimmetrica. Possiamo riassumere l'osservazione in

$$\varphi \in PS(V) \iff M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in S(n, \mathbb{K})\ \forall \mathcal{B} \text{ base di } V$$

$$\varphi \in A(V) \iff M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in A(n, \mathbb{K})\ \forall \mathcal{B} \text{ base di } V$$

Se $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ allora $M(n, \mathbb{K}) = S(n, \mathbb{K}) \oplus A(n, \mathbb{K})$, da cui, osservando che l'endomorfismo su $Bil(V)$ di scambio delle entrate è diagonalizzabile con autospazi $V_1 = PS(V)$ e $V_{-1} = A(V)$, abbiamo $Bil(V) = PS(V) \oplus A(V)$ e $\dim PS(V) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A(V) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Osserviamo che se $\varphi \in PS(V)$ allora $F_{\varphi_d} = F_{\varphi_s} \doteqdot F_\varphi$, da cui $Rad_d(\varphi) = Rad_s(\varphi) \doteqdot Rad(\varphi)$ (invece per $\varphi \in A(V)$ abbiamo $F_{\varphi_d} = -F_{\varphi_s}$).

Per un prodotto scalare abbiamo quindi

$$\ker F_\varphi = Rad(\varphi) \quad \text{e} \quad \operatorname{Imm} F_\varphi = Ann(Rad(\varphi)).$$

4.4 Isometria

Dati V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e $\varphi \in PS(V)$ indichiamo con (V, φ) lo spazio munito del prodotto scalare.

Definizione 4.18 (Isometria)**.**
Dati (V, φ) e (W, ψ), una applicazione $F \in \operatorname{Hom}(V, W)$ è una *isometria* se F è un isomorfismo e rispetta il prodotto scalare, ovvero

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \quad \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \psi(F(\underline{v}_1), F(\underline{v}_2))$$

In tal caso (V, φ) e (W, ψ) si dicono *isometrici.* Se non si presenta ambiguità possiamo affermare che i prodotti scalari sono isometrici.

Il passaggio a coordinate è una isometria: dati (V, φ) e $(\mathbb{K}^n, \phi_{M_\mathcal{B}(\varphi)})$, $[\ ]_\mathcal{B}$ è una isometria tra essi dato che

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = ([\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = \phi_{M_\mathcal{B}(\varphi)}([\underline{v}]_\mathcal{B}, [\underline{w}]_\mathcal{B}).$$

4.4.1 Invarianti per isometria

Osservazione 4.19.
id_V è una isometria tra (V, φ) e (V, φ), prendere l'inversa di una isometria restituisce una isometria, così come la composizione di isometrie, quindi abbiamo una struttura simile alla relazione di equivalenza sulla classe degli spazi vettoriali muniti di prodotto scalare.

Cerchiamo allora di caratterizzare gli spazi vettoriali muniti di prodotto scalare a meno di isometria.

Osservazione 4.20.
Data F isometria da (V, φ) a (W, ψ) abbiamo $F(Rad(\varphi)) = Rad(\psi)$

Dimostrazione.

$$F(\underline{v}) \in Rad(\psi) \iff \psi(F(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W$$

Essendo F isomorfismo $\exists! \underline{z} \in V$ t.c. $\underline{w} = F(\underline{z})$, e quindi $F(\underline{v}) \in Rad(\psi)$ è equivalente a

$$\forall \underline{z} \in V \quad 0 = \psi(F(\underline{v}), F(\underline{z})) = \varphi(\underline{v}, \underline{z}) \iff \underline{v} \in Rad(\varphi).$$

□

Segue che $\dim Rad(\varphi)$ è un invariante per isometria. Essendo una isometria un isomorfismo anche $\dim V$ è un invariante, perciò dalla formula $\dim V - \dim Rad(\varphi) = \operatorname{rnk} \varphi$ troviamo che il rango è un invariante per isometria, e quindi anche essere (o meno) degeneri.

4.4.2 isometrie nel caso matriciale

Esprimiamo la proprietà di isometria con le matrici che rappresentano i prodotti scalari. Siano $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{D}$ base di W, da cui se F è isometria abbiamo $A = M_\mathcal{D}^\mathcal{B}(F) \in GL(n, \mathbb{K})$. Abbiamo quindi $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

$$\begin{aligned}
[\underline{v}_1]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{v}_2]_\mathcal{B} =& \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \psi(F(\underline{v}_1), F(\underline{v}_2)) = \\
=& [F(\underline{v}_1)]_\mathcal{D}^\top M_\mathcal{D}(\psi)[F(\underline{v}_2)]_\mathcal{D} = \\
=& (A[\underline{v}_1]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{D}(\psi)(A[\underline{v}_2]_\mathcal{B}) = \\
=& [\underline{v}_1]_\mathcal{B}^\top A^\top M_\mathcal{D}(\psi) A [\underline{v}_2]_\mathcal{B}
\end{aligned}$$

da cui $M_\mathcal{B}(\varphi) = A^\top M_\mathcal{D}(\psi) A = M_\mathcal{D}^\mathcal{B}(F)^\top M_\mathcal{D}(\psi) M_\mathcal{D}^\mathcal{B}(F)$.

Questa formula è in accordo con quella del cambio di base per i prodotti scalari

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(id_V)^\top M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(id_V)$$

e ricorda la formula per la coniugazione, dove l'inversa è stata sostituita dalla trasposta.

Definizione 4.21 (Matrici congruenti)**.**
Definiamo la seguente relazione di equivalenza su $M(n, \mathbb{K})$: abbiamo che due matrici A, B sono *congruenti* $(A \equiv B)$ se $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $B = P^\top AP$. La relazione è di equivalenza perché

$$A = I_n A I_n = I_n^\top A I_n,$$

$$B = P^\top AP \implies A = (P^\top)^{-1} BP^{-1} = (P^{-1})^\top BP^{-1},$$

$$C = P^\top BP, B = Q^\top AQ \implies C = P^\top Q^\top AQP = (QP)^\top AQP.$$

Osservazione 4.22.
Data A simmetrica, $B \equiv A \implies B$ simmetrica. Infatti

$$P^\top BP = A = A^\top = (P^\top BP)^\top = P^\top B^\top P \implies B = B^\top.$$

Quindi studiare la relazione "essere isometrici" per prodotti scalari su $\mathbb{K}^n$ è equivalente a studiare il quoziente $S(n,\mathbb{K})/_{\equiv}$. Essendo la congruenza un caso particolare di $DS-$equivalenza abbiamo che il rango è un invariante per la congruenza.

In modo analogo allo studio della coniugazione/similitudine abbiamo la seguente proposizione

Proposizione 4.23.
Dati $\varphi \in PS(V)$ e $\psi \in PS(W)$ sono equivalenti le affermazioni seguenti:

1. *(V,φ) e (W,ψ) sono isometrici*
2. *$\forall \mathcal{B}$ base di V e $\forall \mathcal{D}$ base di W, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{D}}(\psi)$*
3. *$\exists \mathcal{B}$ base di V e $\exists \mathcal{D}$ base di W tali che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{D}}(\psi)$*
4. *$\exists \mathcal{B}$ base di V e $\exists \mathcal{D}$ base di W tali che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{D}}(\psi)$*

4.4.3 Pullback

Definizione 4.24 (Pullback)**.**
Fissato $f : V \to W$ isomorfismo, $\varphi \in PS(W)$ definiamo $f^*\varphi \in PS(V)$ il *pullback* o *rimontato* di φ tramite f

$$(f^*\varphi)(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \varphi(f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2)).$$

Da questa definizione segue immediatamente che f è una isometria tra $(V, f^*\varphi)$ e (W,φ).

Il pullback ci permette di confrontare meglio i prodotti scalari. Dati (W,φ) e (Z,ψ) con $W \cong Z$, fissiamo V isomorfo a entrambi tramite $f : V \to W$ e $g : V \to Z$ isomorfismi, allora otteniamo $f^*\varphi, g^*\psi \in PS(V)$ con $(V, f^*\varphi)$ isometrico con (W,φ) e $(V, g^*\psi)$ isometrico con (Z,ψ). Se F fosse una isometria tra (W,φ) e (Z,ψ) allora avremmo $g^{-1} \circ F \circ f$ isometria tra $(V, f^*\varphi)$ e $(V, g^*\psi)$. Analogamente se G è una isometria tra $(V, f^*\varphi)$ e $(V, g^*\psi)$ abbiamo che $g \circ G \circ f^{-1}$ è una isometria tra (W,φ) e (Z,ψ).

$$\begin{tikzcd}
(W,\varphi) \arrow[r, "F"] & (Z,\psi) \\
(V, f^*\varphi) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "G"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & (V, g^*\psi) \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Possiamo quindi restringerci al caso di prodotti scalari sullo stesso spazio. La proposizione precedente cambia come segue

Proposizione 4.25.
Dati $\varphi, \psi \in PS(V)$ sono equivalenti le affermazioni seguenti:

1. *φ e ψ isometrici*
2. *$\forall \mathcal{B}$ base di V $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}}(\psi)$*
3. *$\exists \mathcal{B}$ base di V tale che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}}(\psi)$*
4. *$\exists \mathcal{B}, \mathcal{D}$ basi di V tali che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{D}}(\psi)$*

4.5 Spazi non degeneri associati

Abbiamo definito φ non degenere quando $Rad(\varphi) = \{\underline{0}\}$, quindi studiamo come si comporta φ sul quoziente $V/_{Rad(\varphi)}$ in modo da definire un prodotto scalare non degenere.

$$\pi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V/_{Rad(\varphi)} \\ \underline{v} & \longmapsto & [\underline{v}] \end{array},$$

sia allora

$$\overline{\varphi} : \begin{array}{ccc} V/_{Rad(\varphi)} \times V/_{Rad(\varphi)} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ ([\underline{v}], [\underline{w}]) & \longmapsto & \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \end{array}.$$

Verifichiamo la buona definizione: Siano $\underline{z}_1, \underline{z}_2 \in Rad\varphi$

$$\varphi(\underline{v}+\underline{z}_1, \underline{w}+\underline{z}_2) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \cancelto{0}{\varphi(\underline{v}, \underline{z}_2)} + \cancelto{0}{\varphi(\underline{z}_1, \underline{w})} + \cancelto{0}{\varphi(\underline{z}_1, \underline{z}_2)} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}).$$

Quindi $\overline{\varphi} \in PS\left(V/_{Rad\varphi}\right)$. Verifichiamo che effettivamente $\overline{\varphi}$ è un prodotto scalare non degenere, ovvero verifichiamo che $Rad(\overline{\varphi}) = \{[\underline{0}]\}$: sia $[\underline{v}] \in Rad(\overline{\varphi})$

$$0 = \overline{\varphi}([\underline{v}], [\underline{w}]) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall \underline{w} \in V \implies \underline{v} \in Rad(\varphi) \implies [\underline{v}] = [\underline{0}].$$

Definizione 4.26 (Spazio non degenere associato)**.**
Sia $\left(V/_{Rad\varphi}, \overline{\varphi}\right)$ lo *spazio non degenere associato* a (V, φ).

Osserviamo che una isometria $F : (V, \varphi) \to (W, \psi)$ induce l'isometria

$$\overline{F} : \begin{array}{ccc} \left(V/_{Rad\varphi}, \overline{\varphi}\right) & \longrightarrow & \left(W/_{Rad\psi}, \overline{\psi}\right) \\ [\underline{v}] & \longmapsto & [F(\underline{v})] \end{array}$$

$$\overline{\varphi}([\underline{v}], [\underline{w}]) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \psi(F(\underline{v}), F(\underline{w})) = \overline{\psi}([F(\underline{v})], [F(\underline{w})]) = \overline{\psi}(\overline{F}([\underline{v}]), \overline{F}([\underline{w}]))$$

Proposizione 4.27.
Se $\dim V = \dim W$ *e* $V/_{Rad\varphi} \cong W/_{Rad\psi}$ *allora* $(V, \varphi) \cong (W, \psi)$.

Dimostrazione. Per comodità useremo il simbolo $\cong$ per indicare le isometrie al posto degli isomorfismi. Osserviamo i seguenti fatti chiave:

- $\cancel{\dim V} - \dim Rad\varphi = \dim V/_{Rad\varphi} = \dim W/_{Rad\psi} = \cancel{\dim W} - \dim Rad\psi$
$$\dim Rad\varphi = \dim Rad\psi$$
- Un isomorfismo tra $Rad\varphi$ e $Rad\psi$ è anche una isometria dato che il prodotto scalare è sempre nullo.
- Decomponiamo $V = U \oplus Rad\varphi$ per qualche U supplementare di $Rad\varphi$. Abbiamo che
$$\pi|_U : U \to V/_{Rad\varphi}$$
è un isomorfismo ma anche un'isometria tra $\left(V/_{Rad\varphi}, \overline{\varphi}\right)$ e $\left(U, \varphi|_U\right)$, infatti $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$
$$\overline{\varphi}([\underline{v}_1], [\underline{v}_2]) = \overline{\varphi}([\underline{u}_1 + \underline{z}_1], [\underline{u}_2 + \underline{z}_2]) = \overline{\varphi}([\underline{u}_1], [\underline{u}_2]) = \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2).$$
Abbiamo quindi che $\varphi|_U$ è non degenere come $\overline{\varphi}$ e che tutti i supplementari U_1 di $Rad\varphi$ sono isometrici a U con l'isometria canonica $\pi|_{U_1}^{-1} \circ \pi|_U$.

Fatte queste premesse decomponiamo $V = V_1 \oplus Rad\varphi$ e $W = W_1 \oplus Rad\psi$. Per quanto detto abbiamo

$$(V_1, \varphi|_{V_1}) \cong \left(V/_{Rad\varphi}, \overline{\varphi}\right) \cong \left(W/_{Rad\psi}, \overline{\psi}\right) \cong (W_1, \psi|_{W_1}).$$

Allora $\exists g : (V_1, \varphi|_{V_1}) \to (W_1, \psi|_{W_1})$ isometria. Fissiamo $h : Rad\varphi \to Rad\psi$ isomorfismo (che è anche una isometria per quanto detto).

Sia $F : V \to W$ t.c. $F|_{V_1} = g$ e $F|_{Rad\varphi} = h$. Questo è un isomorfismo da V a W, verifichiamo che è una isometria.

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$. Scriviamo in modo unico $\underline{v}_1 = \underline{w}_1 + \underline{z}_1$ e $\underline{v}_2 = \underline{w}_2 + \underline{z}_2$ secondo la decomposizione $V = V_1 \oplus Rad\varphi$.

$$\begin{aligned}
\psi(F(\underline{v}_1), F(\underline{v}_2)) =& \psi(F(\underline{w}_1 + \underline{z}_1), F(\underline{w}_2 + \underline{z}_2)) = \\
=& \psi(F(\underline{w}_1) + F(\underline{z}_1), F(\underline{w}_2) + F(\underline{z}_2)) = \\
=& \psi(g(\underline{w}_1) + h(\underline{z}_1), g(\underline{w}_2) + h(\underline{z}_2)) = \\
=& \psi(g(\underline{w}_1), g(\underline{w}_2)) + \cancel{\psi(g(\underline{w}_1), h(\underline{z}_2))} + \cancel{\psi(h(\underline{z}_1), g(\underline{w}_2))} + \cancel{\psi(h(\underline{z}_1), h(\underline{z}_2))} = \\
=& \psi(g(\underline{w}_1, \underline{w}_2)) = \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = \\
=& \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + \varphi(\underline{z}_1, \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{z}_2) + \varphi(\underline{z}_1, \underline{z}_2) = \\
=& \varphi(\underline{w}_1 + \underline{z}_1, \underline{w}_2 + \underline{z}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2).
\end{aligned}$$

Abbiamo allora che F è una isometria da (V, φ) a (W, ψ). □

Abbiamo quindi che due spazi sono isometrici se e solo se lo sono gli spazi non degeneri associati e hanno la stessa dimensione (o equivalentemente la stessa dimensione del radicale o rango).

Possiamo rielaborare questo concetto affermando che la dimensione del radicale e la classe di isometria dello spazio non degenere associato sono invarianti completi per isometria.

Questo ci permette di passare agli spazi non degeneri associati se stiamo cercando isometrie.

Capitolo 5

Ortogonalità

5.1 Definizioni e proprietà

Definizione 5.1 (Vettori ortogonali)**.**
Dato (V, φ), affermiamo che $\underline{v}, \underline{w} \in V$ sono *ortogonali* se e solo se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ e scriviamo $\underline{v} \perp \underline{w}$. Possiamo estendere la definizione ad insiemi facilmente:

$$\forall S, T \subset V \quad S \perp T \Longleftrightarrow \forall \underline{v} \in S, \underline{w} \in T,\ \underline{v} \perp \underline{w}.$$

Poniamo inoltre $\underline{v}^{\perp} = \{\underline{w} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{w}\}$ e $W^{\perp} = \{\underline{v} \in V \mid \forall \underline{w} \in W\ \underline{v} \perp \underline{w}\}$.

Definizione 5.2 (Restrizione del prodotto scalare)**.**
Definiamo una *restrizione del prodotto scalare*

$$\varphi|_{W} \doteqdot \varphi|_{W \times W} : W \times W \to \mathbb{K}.$$

Osservazione 5.3.
Il radicale in generale cambia passando a restrizione

$$Rad(\varphi|_{W}) = \{\underline{v} \in W \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0,\ \forall \underline{w} \in W\} = W \cap W^{\perp} \supset Rad(\varphi) \cap W$$

Osservazione 5.4.

- $\underline{v} \in CI(\varphi) \Longleftrightarrow \underline{v} \perp \underline{v}$.
- $F_{\varphi} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \underline{v} & \longmapsto & \varphi(\underline{v}, \cdot\,) \end{array} \implies \ker F_{\varphi}(\underline{v}) = \underline{v}^{\perp}$
- $Rad(\varphi)^{\perp} = V$, $V^{\perp} = Rad(\varphi)$.
- Indicando il luogo di zeri con Z abbiamo

$$Rad(\varphi) \subset W^{\perp} = \bigcap_{\underline{w} \in W} \underline{w}^{\perp} = \bigcap_{\underline{w} \in W} \ker F_{\varphi}(\underline{w}) = Z(F_{\varphi}(W)).$$

  Se $\dim V$ è finita abbiamo anche $\operatorname{Ann}(W^{\perp}) = F_{\varphi}(W)$

Cerchiamo allora di trovare alcune proprietà degli ortogonali sfruttando ciò che sappiamo su Ann e Z. Siano U, W sottospazi di V

- $W \subset U \implies F_{\varphi}(W) \subset F_{\varphi}(U) \overset{Z \text{ inverte inclusioni}}{\implies} W^{\perp} \supset U^{\perp}$
- $F_{\varphi}(W + U) = F_{\varphi}(W) + F_{\varphi}(U)$, quindi

$$(W + U)^{\perp} = Z(F_{\varphi}(W) + F_{\varphi}(U)) \overset{Z \text{ manda somme in intersezioni}}{=} W^{\perp} \cap U^{\perp}$$

- $F_{\varphi}(W \cap U) \subset F_{\varphi}(W) \cap F_{\varphi}(U) \overset{Z \text{ manda } \cap \text{ } in \text{ } +}{\implies} (W \cap U)^{\perp} \supset W^{\perp} + U^{\perp}$
- Se φ è non degenere allora $(W \cap U)^{\perp} = W^{\perp} + U^{\perp}$ per lo stesso motivo di prima sapendo F_{φ} isomorfismo.

Osservazione 5.5.
Dati $\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_n$ generatori di W abbiamo $W^\perp = \bigcap_{i=1}^{n} \underline{w}_i^\perp$.

Dimostrazione.
$\subset$) $W^\perp = \bigcap_{\underline{w} \in W} \underline{w}^\perp \subset \bigcap_{i=1}^{n} \underline{w}_i^\perp$
$\supset$) Siano $\underline{v} \perp \underline{w}_i$ e $\underline{w} \in W \implies \underline{w} = \sum \alpha_i \underline{w}_i$.

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi\left(\underline{v}, \sum \alpha_i \underline{w}_i\right) = \sum \alpha_i \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \implies \underline{v} \in W^\perp$$

$\square$

Osservazione 5.6.
$\dim W^\perp = \dim V - \dim W + \dim(Rad\varphi \cap W)$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\dim W^\perp &= \dim Z(F_\varphi(W)) = \\ &= \dim V - \dim F_\varphi(W) = \\ &= \dim V - \dim W + \dim(\ker F_\varphi \cap W) = \\ &= \dim V - \dim W + \dim(Rad\varphi \cap W)\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 5.7.
$(W^\perp)^\perp = W + Rad\varphi$, da cui $((W^\perp)^\perp)^\perp = W^\perp$.

Dimostrazione. Chiaramente $W \subset (W^\perp)^\perp$ e $Rad\varphi \subset (W^\perp)^\perp$. Per dimostrare la tesi basta quindi verificare che $\dim(W^\perp)^\perp = \dim(W + Rad\varphi)$:

$$\begin{aligned}\dim(W^\perp)^\perp &= \dim V - \dim W^\perp + \dim(Rad\varphi \cap W^\perp) = \\ &= \dim V - (\dim V - \dim W + \dim(Rad\varphi \cap W)) + \dim Rad\varphi = \\ &= \dim W + \dim Rad\varphi - \dim(Rad\varphi \cap W) = \\ &= \dim(W + Rad\varphi).\end{aligned}$$

$\square$

5.2 Isometrie e ortogonalità

Osserviamo che le isometrie rispettano l'ortogonalità

Osservazione 5.8.
Dati $\underline{v}, \underline{w} \in V$ e $f : (V, \varphi) \to (W, \psi)$ una isometria

$$\underline{v} \perp_\varphi \underline{w} \iff \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \psi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = 0 \iff f(\underline{v}) \perp_\psi f(\underline{w}).$$

Osservazione 5.9.
Dato U sottospazio di V e $f : (V, \varphi) \to (W, \psi)$ isometria allora

$$\begin{aligned}f(U^{\perp_\varphi}) =& f(\{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp_\varphi \underline{w}\ \forall \underline{w} \in U\}) = \\ =& \{f(\underline{v}) \in W \mid \underline{v} \perp_\varphi \underline{w}\ \forall \underline{w} \in U\} = \\ =& \{f(\underline{v}) \in W \mid f(\underline{v}) \perp_\psi f(\underline{w})\ \forall f(\underline{w}) \in f(U)\} = \\ =& f(U)^{\perp_\psi}.\end{aligned}$$

Osserviamo ora cosa succede sulle decomposizioni in spazi ortogonali.

Proposizione 5.10.
Siano $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$ con $V_1 \perp_\varphi V_2$ e $W_1 \perp_\psi W_2$. Supponiamo di avere $f_1 : (V_1, \varphi|_{V_1}) \to (W_1, \psi|_{W_1})$ e $f_2 : (V_2, \varphi|_{V_2}) \to (W_2, \psi|_{W_2})$ isometrie, allora l'applicazione $f : (V, \varphi) \to (W, \psi)$ tale che $f|_{V_1} = f_1$ e $f|_{V_2} = f_2$ è una isometria.

Dimostrazione. Siano $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ e scomponiamoli unicamente in $\underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ e $\underline{v}' = \underline{u}_1' + \underline{u}_2'$ con $\underline{u}_1, \underline{u}_1' \in V_1$ e $\underline{u}_2, \underline{u}_2' \in V_2$.

$$\begin{aligned}
\psi(f(\underline{v}), f(\underline{v}')) =& \psi(f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2), f(\underline{u}_1') + f(\underline{u}_2')) = \\
=& \psi(f_1(\underline{u}_1) + f_2(\underline{u}_2), f_1(\underline{u}_1') + f_2(\underline{u}_2')) = \\
=& \psi(f_1(\underline{u}_1), f_1(\underline{u}_1')) + \psi(f_1(\underline{u}_1), f_2(\underline{u}_2')) + \psi(f_2(\underline{u}_2), f_1(\underline{u}_1')) + \psi(f_2(\underline{u}_2), f_2(\underline{u}_2')) = \\
=& \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_1') + 0 + 0 + \varphi(\underline{u}_2, \underline{u}_2') = \\
=& \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_1') + \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2') + \varphi(\underline{u}_2, \underline{u}_1') + \varphi(\underline{u}_2, \underline{u}_2') = \\
=& \varphi(\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{u}_1' + \underline{u}_2') = \\
=& \varphi(\underline{v}, \underline{v}')
\end{aligned}$$

□

Definizione 5.11 (Somma diretta ortogonale)**.**
Dati $W_1, \cdots, W_k$ sottospazi di V in somma diretta, se $W_i \perp W_j$ $\forall i \neq j$ si dicono in *somma diretta ortogonale* e scriviamo

$$W_1 \oplus^\perp W_2 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp W_k$$

Osservazione 5.12.
Con la notazione precedente, sia $\mathcal{B}_i$ una base di W_i. Ponendo $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ base di $\bigoplus^\perp W_i$ abbiamo

$$M_\mathcal{B}(\varphi|_{\bigoplus^\perp W_i}) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(\varphi|_{W_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{\mathcal{B}_k}(\varphi|_{W_k}) \end{pmatrix}$$

diagonale a blocchi. Una conseguenza immediata è

$$\operatorname{rnk} \varphi|_{\bigoplus^{\perp k}_{i=0} W_i} = \sum_{i=1}^k \operatorname{rnk} \varphi|_{W_i}.$$

Abbiamo quindi che φ ristretto alla somma diretta ortogonale è non degenere se e solo se non lo se su tutte le restrizioni.

Proposizione 5.13.
W e $W^\perp$ sono in somma diretta se e solo se $\varphi|_W$ è non degenere. In tal caso abbiamo $V = W \oplus^\perp W^\perp$

Dimostrazione. Come abbiamo osservato, $Rad(\varphi|_W) = W \cap W^\perp$, quindi se φ è non degenere W e $W^\perp$ sono in somma diretta (ortogonale). Consideriamo allora la dimensione di $W \oplus^\perp W^\perp$:

$$\begin{aligned}
\dim W \oplus^\perp W^\perp =& \dim W + \dim W^\perp = \\
=& \dim W + \dim V - \dim W + \overset{0}{\cancel{\dim(Rad(\varphi) \cap W)}} = \\
=& \dim V.
\end{aligned}$$

Se $\varphi|_W$ fosse degenere $W \cap W^\perp \neq \{\underline{0}\}$, quindi non avremmo una somma diretta. □

Consideriamo il caso in cui $W = \operatorname{Span}(\underline{v}_0)$ con $\underline{v}_0 \in V \backslash \{\underline{0}\}$. Abbiamo $\varphi|_W$ non degenere se e solo se $\underline{v}_0 \notin CI(\varphi)$, e in tal caso possiamo decomporre V in una retta e un iperpiano ortogonali

$$V = \operatorname{Span} \underline{v}_0 \oplus^\perp \underline{v}_0^\perp.$$

Scriviamo allora in modo unico $\underline{v} \in V$ come $\underline{v} = \alpha \underline{v}_0 + \underline{z}$ per $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\underline{z} \in \underline{v}_0^\perp$.

$$\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}) = \varphi(\underline{v}_0, \alpha \underline{v}_0 + \underline{z}) = \alpha \varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0) + \overset{0}{\cancel{\varphi(\underline{v}_0, \underline{z})}}$$

Avendo scelto $\underline{v}_0 \notin CI(\varphi)$ abbiamo $\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0) \neq 0$, quindi è valida la seguente definizione

Definizione 5.14 (Coefficiente di Fourier)**.**
Dato $\underline{v}_0 \in V \backslash CI(\varphi)$ e $\underline{v} \in V$ definiamo

$$C(\underline{v}, \underline{v}_0) \doteqdot \frac{\varphi(\underline{v}_0, \underline{v})}{\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_0)}$$

il *coefficiente di Fourier* di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{v}_0$.

Abbiamo quindi una espressione esplicita per le proiezioni di $\underline{v}$ sulla decomposizione che chiamiamo *proiezioni ortogonali*

$$p_{\operatorname{Span}\underline{v}_0}(\underline{v}) = C(\underline{v}, \underline{v}_0)\underline{v}_0$$
$$p_{\underline{v}_0^\perp}(\underline{v}) = \underline{v} - C(\underline{v}, \underline{v}_0)\underline{v}_0$$

5.3 Forma quadratica e basi ortogonali

Data l'utilità del prodotto scalare di un vettore con se stesso definiamo

Definizione 5.15 (Forma quadratica)**.**
La *forma quadratica* associata a φ è la mappa

$$q_\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \underline{v} & \longmapsto & \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \end{array}$$

Osserviamo che $CI(\varphi) = q_\varphi^{-1}(\{0\})$ e che questa funzione NON è lineare:

$$q_\varphi(\lambda\underline{v}) = \lambda^2 q_\varphi(\underline{v}),$$

$$q_\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = q_\varphi(\underline{v}) + q_\varphi(\underline{w}) + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w}).$$

Osservazione 5.16 (Formula di polarizzazione)**.**
Se $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ la forma quadratica determina il prodotto scalare come segue

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{1}{2}(q_\varphi(\underline{v} + \underline{w}) - q_\varphi(\underline{v}) - q_\varphi(\underline{w})).$$

Questa viene detta *formula di polarizzazione.* Osserviamo quindi che

$$\varphi = 0 \Longleftrightarrow q_\varphi = 0 \Longleftrightarrow CI(\varphi) = V.$$

Osservazione 5.17.
Se $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$ esistono prodotti scalari φ tali che $q_\varphi = 0$ e $\varphi \neq 0$. Per esempio $\phi_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$.

Per il resto della trattazione considereremo campi di caratteristica diversa da 2 se non specificato esplicitamente.

5.3.1 Basi ortogonali

Definita la forma quadratica e il comportamento della decomposizione per $\underline{v}_0$ e $\underline{v}_0^\perp$ diamo la seguente definizione:

Definizione 5.18 (Base ortogonale)**.**
Una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di V la definiamo *ortogonale* per φ se $\forall i \neq j$ abbiamo $\underline{v}_i = \underline{v}_j$.

Osservazione 5.19.
Una base $\mathcal{B}$ è ortogonale se e solo se $M_\mathcal{B}(\varphi)$ è diagonale

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} q_\varphi(\underline{v}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_\varphi(\underline{v}_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_\varphi(\underline{v}_n) \end{pmatrix}$$

Osservazione 5.20.
Ogni base ortogonale contiene esattamente $\dim Rad(\varphi)$ vettori isotropi, i quali formano una base di $Rad(\varphi)$. Ovvero φ è non degenere se e solo se $\mathcal{B}$ base ortogonale non contiene vettori isotropi.

Dimostrazione. Abbiamo per definizione di rango di una bilineare che

$$\operatorname{rnk}\varphi = \operatorname{rnk} M_\mathcal{B}(\varphi) = \dim V - \dim Rad(\varphi),$$

quindi $\mathcal{B}$ contiene esattamente $\dim Rad(\varphi)$ vettori isotropi, i quali sono anche linearmente indipendenti. Dato che questi appartengono a $Rad(\varphi)$ e sono del numero giusto essi ne formano una base. □

Osservazione 5.21.
Data $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ base ortogonale di V, abbiamo che $\forall \underline{v} \in V$, scrivendo $\underline{v} = \sum \alpha_i \underline{v}_i$,

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}_j) = \varphi\left(\sum \alpha_i \underline{v}_i, \underline{v}_j\right) = \sum \alpha_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \alpha_j q_\varphi(\underline{v}_j).$$

Allora se $\underline{v}_j \notin CI(\varphi)$ abbiamo $\alpha_j = C(\underline{v}, \underline{v}_j)$, da cui, se φ è non degenere,

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C(\underline{v}, \underline{v}_1) \\ \vdots \\ C(\underline{v}, \underline{v}_n) \end{pmatrix}.$$

Mostriamo allora che le basi ortogonali esistono.

Teorema 5.22 (Esistenza delle basi ortogonali)**.**
Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ munito di prodotto scalare φ esso ammette una base ortogonale.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n = \dim V$.
$n = 1$) Ogni base è ortogonale.
$n > 1$) Se $q_\varphi = 0$ allora $\varphi = 0$, quindi tutte le basi sono ortogonali.
Se invece $q_\varphi \neq 0$ allora $\exists \underline{v} \in V \backslash CI(\varphi)$, quindi possiamo decomporre in modo non banale $V = \operatorname{Span}(\underline{v}) \oplus^\perp \underline{v}^\perp$.
Per ipotesi induttiva esiste $\{\underline{w}_2, \cdots, \underline{w}_n\}$ base ortogonale di $(\underline{v}^\perp, \varphi|_{\underline{v}^\perp}$. Allora $\{\underline{v}, \underline{w}_2, \cdots, \underline{w}_n\}$ è una base ortogonale di V. Sono chiaramente una base e dato che $\underline{w}_i \in \underline{v}^\perp$ abbiamo $\underline{w}_i \perp \underline{v}$. Da questo abbiamo che $\forall i \neq j$ $\underline{w}_i \perp \underline{w}_j$ anche per φ. $\square$

Corollario 5.23.
Applicando questo risultato a $(\mathbb{K}^n, \phi_A)$ con $A \in S(n, \mathbb{K})$ e $\phi_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ abbiamo che $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $P^\top A P = D$ con D diagonale, ovvero ogni matrice simmetrica è congruente ad una diagonale.

Osservazione 5.24.
Se $W_1, \cdots, W_k$ sono sottospazi di V in somma diretta ortogonale e $\mathcal{B}_i$ sono basi di W_i allora

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i \text{ è una base ortogonale di } \bigoplus_{i=1}^{k}{}^{\perp} W_i$$

5.3.2 Algoritmo di Gram-Schmidt

La dimostrazione dell'esistenza per la base ortogonale che abbiamo dato non ci permette di costruirne una. Cerchiamo allora un modo di convertire una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di V in una base ortogonale $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \cdots, \underline{v}'_n\}$. Procediamo costruendo un algoritmo.

Se $\varphi = 0$ allora $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ dato che ogni base sarebbe ortogonale. Altrimenti se $\exists i$ t.c. $\underline{v}_i \notin CI(\varphi)$, allora sia $\underline{v}'_1 = \underline{v}_i$, altrimenti, dato che $\varphi \neq 0$, $\exists \underline{v}_i, \underline{v}_j$ t.c. $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \neq 0$. In tal caso definiamo $\underline{v}'_1 = \underline{v}_i + \underline{v}_j$, infatti

$$q_\varphi(\underline{v}_i + \underline{v}_j) = 2\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \neq 0 \implies \underline{v}_i + \underline{v}_j \notin CI(\varphi).$$

Allora a meno di riordinare la base e sostituire un elemento con se stesso sommato ad un altro elemento della base supponiamo $\underline{v}_1 \notin CI(\varphi)$. Decomponiamo allora $V = \operatorname{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \underline{v}_1^\perp$.

Definiamo allora $\underline{v}_i^{(1)} = p_{\underline{v}_1^\perp}(\underline{v}_i) = \underline{v}_i - C(\underline{v}_i, \underline{v}_1)\underline{v}_1$ per $2 \leq i \leq n$. Essendo la proiezione ortogonale, questi vettori sono chiaramente perpendicolari a $\underline{v}_1$, mostriamo quindi che sono linearmente indipendenti.

$$\underline{0} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underline{v}_i^{(1)} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underline{v}_i + \left(-\sum_{i=2}^{n} \alpha_i C(\underline{v}_i, \underline{v}_1)\right) \underline{v}_1.$$

Essendo $\mathcal{B}$ una base abbiamo che $\forall 2 \leq i \leq n$, $\alpha_i = 0$ e $(-\sum_{i=2}^n \alpha_i C(\underline{v}_i, \underline{v}_1)) = 0$, ma allora anche la combinazione lineare in α_i era nulla, e quindi $\{\underline{v}_2^{(1)}, \cdots, \underline{v}_n^{(1)}\}$ è linearmente indipendente.

Allora $\mathcal{B}^{(1)} = \{\underline{v}_2^{(1)}, \cdots, \underline{v}_n^{(1)}\}$ è una base di $\underline{v}_1^\perp$ dato il contenimento e la dimensione, quindi possiamo reiterare la decomposizione considerando $\mathcal{B}^{(1)}$ base di $\underline{v}_1^\perp$ e il prodotto scalare $\varphi|_{\underline{v}_1^\perp}$. Dato che l'unione di basi ortogonali di fattori di una somma diretta ortogonale fornisce una base ortogonale della somma abbiamo concluso.

Definizione 5.25 (Algoritmo di Gram-Schmidt)**.**
Se φ è anisotropo allora il primo vettore che consideriamo è sempre non isotropo, quindi l'algoritmo si semplifica. In questo caso chiamiamo il procedimento *ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*.

Osservazione 5.26.
Applicando l'algoritmo di GRam-Schmidt ad una base a bandiera per un endomorfismo troviamo una base ortogonale a bandiera per lo stesso endomorfismo.

Dimostrazione. Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt ogni vettore viene mappato ad uno nel generato da se stesso e i precedenti: Sia $\mathcal{B}$ la base sulla quale applichiamo l'algoritmo, il primo passo segue il seguente schema

$$\begin{array}{ccccc} \underline{v}_1 & \rightarrow & \underline{v}_1 & = \underline{v}_1^1 \\ \underline{v}_2 & \rightarrow & \underline{v}_2 - C(\underline{v}_1, \underline{v}_2)\underline{v}_1 & = \underline{v}_2^1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \underline{v}_n & \rightarrow & \underline{v}_n - C(\underline{v}_1, \underline{v}_n)\underline{v}_1 & = \underline{v}_n^1 \end{array}$$

Al passo successivo $\underline{v}_1^1$ e $\underline{v}_2^1$ rimarranno invariati e agli altri sarà sottratto $C(\underline{v}_2^1, \underline{v}_i^1)\underline{v}_2^1 \in \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Analogamente al passo successivo i primi tre vettori saranno fissati e ai successivi potrà essere introdotto un contributo appartenente a $\operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. Proseguendo a compimento dell'algoritmo avremo che $\underline{v}_i^{(n-1)} \in \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_i)$, ovvero la nuova base è ancora a bandiera se $\mathcal{B}$ lo era. □

Corollario 5.27.
Dati $f \in \operatorname{End}(V)$ triangolabile *e* φ anisotropo *abbiamo che* $\exists \mathcal{B}$ *base ortogonale di* (V, φ) *che triangola* f*.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D}$ una base che triangola f, allora la base $\mathcal{B}$ ottenuta applicando Gram-Schmidt a $\mathcal{D}$ è ortogonale e con la stessa bandiera, quindi è una base di f a bandiera $f-$invariante, ovvero triangola f. □

5.4 Funzionali rappresentabili

Definizione 5.28 (Funzionale $\varphi-$rappresentabile)**.**
Un funzionale $f \in V^*$ è $\varphi-$*rappresentabile* se $\exists \underline{v} \in V$ tale che $f = \varphi(\underline{v}, \cdot)$, ovvero

$$\forall \underline{w} \in V, \quad f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}).$$

Proposizione 5.29.
f *è* $\varphi-$*rappresentabile e solo se* $Rad(\varphi) \subseteq \ker f$*.*

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) Se f è $\varphi-$rappresentabile tramite $\underline{v}$ e avessimo $\underline{w} \in Rad(\varphi) \setminus \ker f$ avremmo $0 \neq f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ ↯.
$\Longleftarrow$) Sia $\mathcal{B}$ una base ortogonale di V, abbiamo quindi a meno di riordinamento

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con D diagonale invertibile. f è $\varphi-$rappresentabile se e solo se $\exists \underline{x}$ tale che $\forall \underline{v} \in V$

$$\underline{v} M_{\mathcal{B}}(\varphi)\underline{x} = f(\underline{v}) \Longleftrightarrow \underbrace{\underline{e}_i^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)}_{i-\text{esima riga}} \underline{x} = f(\underline{e}_i) \Longleftrightarrow M_{\mathcal{B}}(\varphi)\underline{x} = \begin{pmatrix} f(\underline{e}_1) \\ \vdots \\ f(\underline{e}_n) \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora la matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} D & 0 & \begin{matrix} f(\underline{e}_1) \\ \vdots \\ f(\underline{e}_k) \end{matrix} \\ 0 & 0 & \begin{matrix} f(\underline{e}_{k+1}) \\ \vdots \\ f(\underline{e}_n) \end{matrix} \end{array}\right) \overset{\text{se } Rad(\varphi) \subseteq \ker f}{=} \left(\begin{array}{cc|c} D & 0 & \begin{matrix} f(\underline{e}_1) \\ \vdots \\ f(\underline{e}_k) \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

quindi il sistema è risolubile per Rouché-Capelli. □

Consideriamo una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ come nella dimostrazione. Abbiamo quindi $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i$, e se $\underline{v}_i$ non è isotropo (essendo una base ortogonale, questo equivale a $\underline{v}_i \notin Rad(\varphi)$) abbiamo

$$\alpha_i = C(\underline{v}, \underline{v}_i) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}.$$

Se f è $\varphi-$rappresentabile tramite $\underline{v}$ abbiamo $\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$. Scrivendo in modo unico $\underline{v} = \underline{u} + \underline{z}$ con $\underline{z} \in Rad(\varphi)$ e $\underline{u} \notin Rad(\varphi)$ abbiamo

$$\forall \underline{w} \in V, f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{u}, \underline{w}),$$

quindi $\underline{u} = \sum_{\underline{v}_i \notin Rad(\varphi)} \frac{f(\underline{v}_i)}{q_\varphi(\underline{v}_i)} \underline{v}_i$ rappresenta f.

Capitolo 6

Gruppo ortogonale

6.1 Definizione e proprietà

Definiamoci un altro invariante per isometria

Definizione 6.1 (Gruppo ortogonale)**.**
Dato $\varphi \in PS(V)$ definiamo *gruppo ortogonale* di φ

$$O(\varphi) = \{f \in GL(V) \mid \forall \underline{v}, \underline{w} \in V,\ \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))\},$$

ovvero il gruppo delle isometrie da (V, φ) a (V, φ).

Nel caso $V = \mathbb{K}^n$ e $\varphi = \phi_M$ con $M \in S(n, \mathbb{K})$ allora abbiamo

$$O(\phi_M) = \{P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid P^\top MP = M\}.$$

In particolare per $M = I_n$ otteniamo il *gruppo ortogonale matriciale classico*

$$O(n, \mathbb{K}) = \{P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid P^{-1} = P^\top\}.$$

Le matrici che appartengono al gruppo ortogonale matriciale classico sono dette *ortogonali*.

Osservazione 6.2.
Nel caso delle matrici ortogonali similitudine e congruenza coincidono.

Osserviamo che se (V, φ) e (W, ψ) sono isometrici tramite F allora $O(\varphi)$ e $O(\psi)$ sono gruppi isomorfi. Infatti alla mappa $f \in O(\varphi)$ corrisponde la mappa $F \circ f \circ F^{-1} \in O(\psi)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "F"] \\ W \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

Ovvero la mappa

$$F \circ \ \cdot\ \circ F^{-1} : \begin{array}{ccc} O(\varphi) & \longrightarrow & O(\psi) \\ f & \longmapsto & F \circ f \circ F^{-1} \end{array}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Chiaramente $F \circ f \circ F^{-1} \in GL(W)$. Osserviamo che la mappa è un omomorfismo:

$$\begin{aligned} F \circ (f \circ g) \circ F^{-1} =& F \circ (f \circ F^{-1} \circ F \circ g) \circ F^{-1} = \\ =& (F \circ f \circ F^{-1}) \circ (F \circ g \circ F^{-1}). \end{aligned}$$

Infine notiamo che $F^{-1} \circ \ \cdot\ \circ F$ è l'inversa della nostra mappa, la quale è sempre un omomorfismo di gruppi per quanto detto sopra. $\square$

Corollario 6.3.
Per ogni base $\mathcal{B}$ di V, ricordando $\phi_M(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top M \underline{y}$, abbiamo

$$O(\varphi) \cong O(\phi_{M_\mathcal{B}(\varphi)})$$

Osservazione 6.4.
Data $f \in O(\varphi)$, se $\underline{v}$ è un autovettore *non isotropo* relativo all'autovalore λ abbiamo che

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{v})) = \lambda^2 \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \implies \lambda = \pm 1.$$

Definizione 6.5 (Gruppo speciale ortogonale)**.**
Dato φ non degenere definiamo il *gruppo speciale ortogonale* di φ come

$$SO(\varphi) = \{f \in O(\varphi) \mid \det f = 1\} = SL(V) \cap O(\varphi)$$

6.2 Riflessioni ortogonali

Ispirandoci alla riflessione ortogonale per il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ definiamo una generalizzazione

Definizione 6.6 (Riflessione ortogonale)**.**
Sia (V, φ) uno spazio vettoriale a dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ con $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$. Sia $\underline{v} \in V \backslash CI(\varphi)$. Usando la decomposizione $V = \operatorname{Span}(\underline{v}) \oplus \underline{v}^\perp$ definiamo l'applicazione $\rho_{\underline{v}} : V \to V$ lineare ponendo

$$\rho_{\underline{v}}(\underline{v}) = -\underline{v} \quad \text{ e } \quad \rho_{\underline{v}}\big|_{\underline{v}^\perp} = id_{\underline{v}^\perp}.$$

$\rho_{\underline{v}}$ è detta la *riflessione ortogonale* parallela a $\underline{v}$ o rispetto a $\underline{v}^\perp$.

Osservazione 6.7.

$$M_{\{\underline{v}, \mathcal{B}_{\underline{v}^\perp}\}}(\rho_{\underline{v}}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo facilmente che $\rho_{\underline{v}} = \rho_{\lambda \underline{v}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ e che $\rho_{\underline{v}}^2 = id_V$. Allora $\mu_{\rho_{\underline{v}}}(t) = t^2 - 1$ e quindi è diagonalizzabile con spettro $\{\pm 1\}$ e autospazi $V_{-1}(\rho_{\underline{v}}) = \operatorname{Span}(\underline{v})$ e $V_1(\rho_{\underline{v}}) = \underline{v}^\perp$.

Scomponendo gli elementi di V secondo la decomposizione canonica di $\rho_{\underline{v}}$ troviamo una espressione esplicita per la riflessione ortogonale:

$$\forall \underline{w} \in V \quad \underline{w} = C(\underline{w}, \underline{v})\underline{v} + \underline{z}$$

con $\underline{z} \perp \underline{v}$, allora

$$\rho_{\underline{v}}(\underline{w}) = -C(\underline{w}, \underline{v})\underline{v} + \underline{z} = \underline{w} - 2C(\underline{w}, \underline{v})\underline{v}$$

Proposizione 6.8.
Ogni riflessione ortogonale appartiene al gruppo ortogonale.

Dimostrazione. Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ decomponiamoli su $\operatorname{Span}(\underline{v})$ e $\underline{v}^\perp$.

$$\underline{v}_1 = C(\underline{v}_1, \underline{v})\underline{v} + \underline{z}_1 \qquad \underline{v}_2 = C(\underline{v}_2, \underline{v})\underline{v} + \underline{z}_2.$$

Verifichiamo allora che $\varphi(\rho_{\underline{v}}(\underline{v}_1), \rho_{\underline{v}}(\underline{v}_2)) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_{\underline{v}}(\underline{v}_1), \rho_{\underline{v}}(\underline{v}_2)) =& \varphi(-C(\underline{v}_1, \underline{v})\underline{v} + \underline{z}_1, -C(\underline{v}_2, \underline{v})\underline{v} + \underline{z}_2) = \\ =& C(\underline{v}_1, \underline{v})C(\underline{v}_2, \underline{v})\varphi(\underline{v}, \underline{v}) + 0 + 0 + \varphi(\underline{z}_1, \underline{z}_2) = \\ =& \varphi(C(\underline{v}_1, \underline{v})\underline{v} + \underline{z}_1, C(\underline{v}_2, \underline{v})\underline{v} + \underline{z}_2) = \\ =& \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2). \end{aligned}$$

□

Proposizione 6.9.
Se $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \backslash CI(\varphi)$ e $\underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$, allora $\rho_{\underline{v}_1} \circ \rho_{\underline{v}_2} = \rho_{\underline{v}_2} \circ \rho_{\underline{v}_1}$.

Dimostrazione. Decomponiamo $V = \operatorname{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \operatorname{Span}(\underline{v}_2) \oplus^\perp W^\perp$ con $W = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Allora $\forall \underline{w} \in V$ abbiamo $\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \underline{z}$. Allora

$$\begin{aligned} \rho_{\underline{v}_1}(\rho_{\underline{v}_2}(\underline{w})) =& \rho_{\underline{v}_1}(\alpha_1 \underline{v}_1 - \alpha_2 \underline{v}_2 + \underline{z}) = \\ =& -\alpha_1 \underline{v}_1 - \alpha_2 \underline{v}_2 + \underline{z} = \\ =& \rho_{\underline{v}_2}(-\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \underline{z}) = \\ =& \rho_{\underline{v}_2}(\rho_{\underline{v}_1}(\underline{w})) \end{aligned}$$

□

6.2.1 Decomposizione delle auto-isometrie

Impiegando il metodo della dimostrazione precedente troviamo che per $\underline{v}_i$ non isotropi ortogonali

$$\rho_{\underline{v}_1} \circ \rho_{\underline{v}_2} \circ \cdots \circ \rho_{\underline{v}_k}(\underline{w}) = \begin{cases} -\underline{w} & \forall \underline{w} \in \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_k) = W \\ \underline{w} & \forall \underline{w} \in W^\perp \end{cases}.$$

Ma allora scegliendo una base $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ ortogonale di V, se φ è non degenere, abbiamo che

$$-id_V = \rho_{\underline{v}_1} \circ \cdots \circ \rho_{\underline{v}_n}.$$

Osserviamo che non è possibile esprimere $-id_V$ come composizione di $m < n$ trasposizioni, dato che almeno uno spazio di dimensione $n - m$ resta invariato (il perpendicolare al generato dai vettori considerati).

È lecito chiedersi se ogni elemento di $O(\varphi)$ è esprimibile come composizione finita di trasposizioni. Effettivamente è vero.

Lemma 6.10.
Se $\underline{v}, \underline{w} \in V$ sono tali che $q_\varphi(\underline{v}) = q_\varphi(\underline{w})$ allora abbiamo che:

- *se $\underline{z} = \underline{v} - \underline{w}$ è non isotropo allora $\rho_{\underline{z}}(\underline{v}) = \underline{w}$,*
- *se $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$ è non isotropo allora $\rho_{\underline{u}}(\underline{v}) = -\underline{w}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\underline{v} = \frac{1}{2}\underline{z} + \frac{1}{2}\underline{u}$ e $\underline{w} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{z}$. Osserviamo che $\underline{z} \perp \underline{u}$, infatti

$$\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) - \cancel{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} + \cancel{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} - \varphi(\underline{w}, \underline{w}) = q_\varphi(\underline{v}) - q_\varphi(\underline{w}) = 0.$$

Abbiamo quindi

$$\rho_{\underline{z}}(\underline{v}) = \rho_{\underline{z}}\left(\frac{1}{2}\underline{z} + \frac{1}{2}\underline{u}\right) = -\frac{1}{2}\underline{z} + \frac{1}{2}\underline{u} = \underline{w},$$

$$\rho_{\underline{u}}(\underline{v}) = \rho_{\underline{u}}\left(\frac{1}{2}\underline{z} + \frac{1}{2}\underline{u}\right) = \frac{1}{2}\underline{z} - \frac{1}{2}\underline{u} = -\underline{w}.$$

□

Lemma 6.11.
Se φ è non degenere e $\underline{v}$ è non isotropo allora data $f \in O(\varphi)$ abbiamo che almeno uno tra $\underline{v} - f(\underline{v})$ e $\underline{v} + f(\underline{v})$ non è isotropo.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo:

$$\begin{cases} 0 = \varphi(\underline{v} + f(\underline{v}), \underline{v} + f(\underline{v})) = q_\varphi(\underline{v}) + q_\varphi(f(\underline{v})) + 2\varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) \\ 0 = \varphi(\underline{v} - f(\underline{v}), \underline{v} - f(\underline{v})) = q_\varphi(\underline{v}) + q_\varphi(f(\underline{v})) - 2\varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) \end{cases}.$$

Osservando che $q_\varphi(\underline{v}) = q_\varphi(f(\underline{v}))$ e sommando le due equazioni troviamo

$$0 = 4q_\varphi(\underline{v}).$$

Dato che $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ questo implica $q_\varphi(\underline{v}) = 0$ che è assurdo dato che per ipotesi $\underline{v}$ non è isotropo $\lightning$. □

Teorema 6.12.
Se φ è non degenere allora $O(\varphi)$ è generato dalle riflessioni ortogonali, ovvero ogni $f \in O(\varphi)$ è composizione di un numero finito di riflessioni ortogonali.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n = \dim V$.
$n = 1$) Dimostriamo che $O(\varphi) = \{id_V, -id_V\}$. Ogni lineare è della forma $f = \lambda id_V$, quindi ponendo per $\underline{v}$ non isotropo $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \lambda\underline{v})$ abbiamo $\lambda^2 = 1$, ovvero $\lambda = \pm 1$.
$n > 1$) Supponiamo che esista $\underline{v}_0 \in V \backslash CI(\varphi)$ t.c. $f(\underline{v}_0) = \underline{v}_0$ e scriviamo $V = \operatorname{Span}(\underline{v}_0) \oplus \underline{v}_0^\perp$. Essendo $\underline{v}_0^\perp$ $f-$invariante ($\underline{w} \perp \underline{v} \implies f(\underline{w}) \perp f(\underline{v}) = \underline{v}$) ed essendo $\varphi|_{\underline{v}_0^\perp}$ non degenere abbiamo che $f|_{\underline{v}_0^\perp} \in O(\varphi|_{\underline{v}_0^\perp})$ e quindi per ipotesi induttiva

$$f|_{\underline{v}_0^\perp} = \widetilde{\rho}_1 \circ \cdots \circ \widetilde{\rho}_k \qquad \widetilde{\rho}_i \in O(\varphi|_{\underline{v}_0^\perp}).$$

Se $\widetilde{\rho}_i$ è la riflessione ortogonale parallela a $\underline{w}_i \in \underline{v}_0^\perp$ allora definiamo $\rho_i \in O(\varphi)$ come $\rho_{\underline{w}_i}$.

Mostriamo che $f = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$. Per definizione coincidono restringendoci a $\underline{v}_0^\perp$, quindi basta verificare che $(\rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k)\underline{v}_0 = \underline{v}_0$. Questo deriva dal fatto che $\underline{v}_0 \perp \underline{w}_i \in \underline{v}_0^\perp$ e quindi $\rho_i(\underline{v}_0) = \underline{v}_0$ $\forall i \in \mathbb{N}_k$.

Verifichiamo allora che un tale $\underline{v}_0$ esiste. Ricordando che φ è non degenere, sia $\underline{v} \in V \backslash CI(\varphi)$. Dato $f \in O(\varphi)$ abbiamo che $q_\varphi(\underline{v}) = q_\varphi(f(\underline{v}))$. Se $\underline{v} = f(\underline{v})$ abbiamo finito, altrimenti consideriamo $\underline{w} = f(\underline{v}) - \underline{v}$ e $\underline{z} = f(\underline{v}) + \underline{v}$. Se $\underline{w} \notin CI(\varphi)$ applicando il lemma abbiamo che $\rho_{\underline{w}}(f(\underline{v})) = \underline{v}$, ma allora $\rho_{\underline{w}} \circ f$ è una mappa del gruppo ortogonale che fissa $\underline{v}$, quindi per quanto detto

$$\rho_{\underline{w}} \circ f = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k \implies f = \rho_{\underline{w}} \circ \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

Se $\underline{z} \notin CI(\varphi)$ applicando il lemma abbiamo $\rho_{\underline{w}}(f(\underline{v})) = -\underline{v}$, ovvero

$$f = \rho_{\underline{w}} \circ (-id_V) \circ \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

Concludiamo osservando che per il secondo lemma almeno uno tra $\underline{w}$ e $\underline{z}$ non è isotropo. □

Osservazione 6.13.
Osserviamo che la dimostrazione ci fornisce un limite massimo indipendente da φ per il numero di riflessioni ortogonali necessarie per comporre ogni mappa nel gruppo ortogonale. Infatti detta $C(n)$ questo limite per la dimensione n abbiamo che $C(1) = 1$ e che i possibili valori per $C(n+1)$ sono $C(n)$, $C(n)+1$ e $C(n)+1+n$. Prendendo il caso peggiore ad ogni passo troviamo

$$C(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

È possibile dimostrare una condizione più stringente, ovvero che ogni elemento del gruppo ortogonale è composizione di al massimo n riflessioni ortogonali.

6.3 Spazi congruenti

Definizione 6.14 (Spazi congruenti)**.**
Dati due sottospazi W, U di V essi sono *congruenti* se $\exists f \in O(\varphi)$ t.c. $f(W) = U$.

Osserviamo che in questo modo definiamo una relazione di equivalenza sui sottospazi di V e se W e U sono congruenti allora $(W, \varphi|_W)$ e $(U, \varphi|_U)$ sono isometrici tramite l'isometria $f|_W$.

Vorremmo mostrare anche il contrario, ovvero che è possibile estendere isometrie tra sottospazi a elementi del gruppo ortogonale.

Consideriamo dapprima il caso di $\varphi|_W$ non degenere (e quindi anche $\varphi|_U$ non degenere).

Proposizione 6.15.
Dati (V, φ) e U, W sottospazi di V isometrici tramite $g : W \to U$ tali che $\varphi|_W$ non degenere abbiamo che $\exists f \in O(\varphi)$ tale che $f|_W = g$.

Dimostrazione. Da $\varphi|_W$ non degenere ricaviamo $\varphi|_U$ non degenere per l'isometria. Procediamo quindi per induzione su $m = \dim W = \dim U$.
$m = 0$) $U = W = \{\underline{0}\}$, quindi $g = 0$ e ogni elemento del gruppo ortogonale la estende.
$m \geq 1$) Sia $\{\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_m\}$ una base ortogonale di W, da cui $\{\underline{u}_i = g(\underline{w}_i) \mid i \in \{1, \cdots, m\}\}$ è una base ortogonale di U. Essendo $\varphi|_W$ non degenere abbiamo che ogni elemento di queste basi non è isotropo.

Siano quindi $W' = \text{Span}(\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_{m-1})$ e $U' = \text{Span}(\underline{u}_1, \cdots, \underline{u}_{m-1})$. Osserviamo che $g|_{W'}$ è una isometria tra $(W', \varphi|_{W'})$ e $(U', \varphi|_{U'})$, quindi per ipotesi induttiva $\exists f' \in O(\varphi)$ tale che $f'|_{W'} = g|_{W'}$.

Se $f'(\underline{w}_m) = \underline{u}_m$ allora $f'|_W = g$ da cui la tesi.
Altrimenti $f'(\underline{w}_m) \neq \underline{u}_m = g(\underline{w}_m)$. Osserviamo che

$$0 \neq q_\varphi(\underline{u}_m) = q_\varphi(g(\underline{w}_m)) = q_\varphi(\underline{w}_m) = q_\varphi(f'(\underline{w}_m)).$$

Siano allora $\underline{v} = f'(\underline{w}_m) - \underline{u}_m$ e $\underline{z} = f'(\underline{w}_m) + \underline{u}_m$. Osserviamo che $\underline{v}$ e $\underline{z}$ non sono entrambi isotropi, infatti supponendo il contrario

$$\begin{aligned} 0 =& q_\varphi(f'(\underline{w}_m)) - 2\varphi(f'(\underline{w}_m), \underline{u}_m) + q_\varphi(\underline{u}_m) = q_\varphi(\underline{w}_m) + q_\varphi(\underline{u}_m) - 2\varphi(f'(\underline{w}_m), \underline{u}_m) \\ 0 =& q_\varphi(f'(\underline{w}_m)) + 2\varphi(f'(\underline{w}_m), \underline{u}_m) + q_\varphi(\underline{u}_m) = q_\varphi(\underline{w}_m) + q_\varphi(\underline{u}_m) + 2\varphi(f'(\underline{w}_m), \underline{u}_m) \end{aligned}$$

da cui $0 = 2q_\varphi(\underline{w}_m) + 2q_\varphi(\underline{u}_m) = 2q_\varphi(\underline{w}_m) + 2q_\varphi(g(\underline{w}_m)) = 4q_\varphi(\underline{w}_m)$ e dato che $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ abbiamo $0 = q_\varphi(\underline{w}_m)$ che è assurdo $\lightning$.
($\underline{\underline{v} \notin CI(\varphi)}$) Dalla definizione di $\underline{v}$ abbiamo $\rho_{\underline{v}}(f'(\underline{w}_m)) = \underline{u}_m$, quindi proviamo a verificare che $\rho_{\underline{v}} \circ f'|_W =$

g. Basta verificare che $\rho_{\underline{v}} \circ f'$ e g coincidono su $\{\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_m\}$. Coincidono su $\underline{w}_m$ per costruzione, quindi consideriamo $\underline{w}_i$ con $1 \leq i < m$. Osserviamo che

$$\rho_{\underline{v}}(f'(\underline{w}_i)) = \rho_{\underline{v}}(g(\underline{w}_i)) = \rho_{\underline{v}}(\underline{u}_i),$$

quindi per avere la tesi basta verificare $\underline{v} \perp \underline{u}_i$.

$$\varphi(\underline{v}, \underline{u}_i) = \varphi(f'(\underline{w}_m) - \underline{u}_m, \underline{u}_i) = \varphi(f'(\underline{w}_m), \underline{u}_i) - 0 =$$

$$= \varphi(f'(\underline{w}_m), f'(\underline{w}_i)) = \varphi(\underline{w}_m, \underline{w}_i) = 0.$$

$\underline{(\underline{v} \in CI(\varphi))}$ Per quanto detto, $\underline{z} \notin CI(\varphi)$ e dalla definizione di $\underline{z}$ troviamo $\rho_{\underline{z}}(f'(\underline{w}_m)) = -\underline{u}_m$, quindi $(\rho_{\underline{u}_m} \circ \rho_{\underline{z}} \circ f')(\underline{w}_m) = \underline{u}_m$. Per concludere quindi dobbiamo verificare che $\rho_{\underline{u}_m} \circ \rho_{\underline{z}} \circ f'$ e g coincidono su $\{\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_m\}$. Per costruzione coincidono su $\underline{w}_m$, quindi consideriamo $\underline{w}_i$ con $1 \leq i < m$.

$$\rho_{\underline{u}_m}(\rho_{\underline{z}}(f'(\underline{w}_i))) = \rho_{\underline{u}_m}(\rho_{\underline{z}}(\underline{u}_i))$$

Se $\underline{u}_i \perp \underline{z}$ avremmo $\rho_{\underline{u}_m}(\rho_{\underline{z}}(f'(\underline{w}_i))) = \rho_{\underline{u}_m}(\underline{u}_i) = \underline{u}_i$ da cui la tesi, quindi proviamo a verificare $\underline{u}_i \perp \underline{z}$.

$$\varphi(\underline{z}, \underline{u}_i) = \varphi(f'(\underline{w}_m) + \underline{u}_m, \underline{u}_i) = \varphi(f'(\underline{w}_m), \underline{u}_i) + 0 =$$

$$= \varphi(f'(\underline{w}_m), f'(\underline{w}_i)) = \varphi(\underline{w}_m, \underline{w}_i) = 0.$$

□

Capitolo 7

Teoria di Witt

Avendo mostrato che, dati U, W sottospazi isometrici di V tali che $\varphi|_W$ non degenere, congruenza ed essere isometrici sono equivalenti possiamo provare a ricondurre i casi degeneri a questo.

Una prima strategia può essere considerare φ non degenere ed estendere U e W in modo appropriato così da rendere il prodotto scalare non degenere sulle restrizioni.

7.1 Estensioni non degeneri e piani iperbolici

Definizione 7.1 (Estensione non degenere)**.**
Sia (V, φ) con φ non degenere e sia W un sottospazio di V. Una *estensione non degenere* di W è un sottospazio W' di V tale che $W \subseteq W'$ e $\varphi|_{W'}$ è non degenere.

Definizione 7.2 (Completamento non degenere)**.**
Un *completamento non degenere* è una estensione non degenere di dimensione minima.

Osservazione 7.3.
Le estensioni non degeneri esistono, infatti V è un'estensione non degenere di ogni sottospazio. Per il principio del minimo esistono quindi anche completamenti non degeneri.

Osservazione 7.4.
Se $\varphi|_W$ è non degenere allora l'unico completamento non degenere di W è W stesso.

La nostra strategia sarà trovare un modo di associare ai vettori base del radicale sulla restrizione un altro vettore con il quale non è perpendicolare. Un modo per avere vettori isotropi come base di uno spazio con prodotto scalare non degenere è costruire piani iperbolici.

Definizione 7.5 (Piano iperbolico)**.**
Un *piano iperbolico* (H, φ) è uno spazio vettoriale tale che $\dim H = 2$, φ non degenere e $CI(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$.

Proposizione 7.6.
Tutti i piani iperbolici (H, φ) sullo stesso campo sono isometrici. In particolare esiste una base $\mathcal{B}$, detta base iperbolica, tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Dato che $CI(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$ sia $\underline{v} \in CI(\varphi) \setminus \{\underline{0}\}$ e lo completiamo a base di H con $\underline{w}$, da cui abbiamo $\mathcal{D} = \{\underline{v}, \underline{w}\}$.

$$M_{\mathcal{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Essendo φ non degenere abbiamo $a \neq 0$. Proviamo allora a costruire una base iperbolica della forma $\mathcal{B} = \{\underline{v}, \alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\}$ con $\beta \neq 0$. Cerchiamo quindi le soluzioni al seguente sistema

$$\begin{cases} 1 = \varphi(\underline{v}, \alpha\underline{v} + \beta\underline{w}) = \beta\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \beta a \\ 0 = \varphi(\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}, \alpha\underline{v} + \beta\underline{w}) = 2\alpha\beta\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \beta^2\varphi(\underline{w}, \underline{w}) = 2\alpha\beta a + \beta^2 b \end{cases}$$

Essendo $\beta \neq 0$ ci riconduciamo a

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{a} \\ \alpha = -\dfrac{\beta b}{2a} = -\dfrac{b}{2a^2} \end{cases}$$

quindi $\mathcal{B} = \left\{ \underline{v}, \dfrac{1}{\varphi(\underline{v},\underline{w})}\underline{w} - \dfrac{q_\varphi(\underline{w})}{2(\varphi(\underline{v},\underline{w}))^2}\underline{v} \right\}$ è una base iperbolica per H. $\square$

Osservazione 7.7.
Per come è fatta la matrice associata in una base iperbolica $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ troviamo che

$$CI(\varphi) = \operatorname{Span}(\underline{v}_1) \cup \operatorname{Span}(\underline{v}_2).$$

Osservazione 7.8.
Nella costruzione della base iperbolica il primo vettore è rimasto invariato, quindi sappiamo che dato un piano iperbolico e un vettore isotropo non nullo in esso contenuto possiamo completarlo a base iperbolica.

Proposizione 7.9.
Data $f \in O(H,\varphi)$ con H piano iperbolico abbiamo che, posta $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ una base iperbolica

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \ \textit{oppure,}\ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Essendo un elemento del gruppo ortogonale, $f(CI) = CI = \operatorname{Span}(\underline{v}_1) \cup \operatorname{Span}(\underline{v}_2)$, quindi abbiamo che $f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1$ e $f(\underline{v}_2) = \lambda_2 \underline{v}_2$ oppure $f(\underline{v}_1) = \lambda_2 \underline{v}_2$ e $f(\underline{v}_2) = \lambda_1 \underline{v}_1$, cioè

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo inoltre che

$$1 = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \varphi(f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2)) = \lambda_1\lambda_2\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2),$$

da cui $1 = \lambda_1\lambda_2$, ovvero la tesi. $\square$

7.2 Completamento non degenere esplicito

Proposizione 7.10.
Consideriamo (V,φ) uno spazio vettoriale con φ non degenere e W un suo sottospazio con $\varphi|_W$ degenere. Siano U un supplementare in W di $Rad(\varphi|_W)$ e $\{\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_k\}$ una base di $Rad(\varphi|_W) = W \cap W^\perp$, allora $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$ esiste H_i piano iperbolico che contiene $\underline{z}_i$ tale che

$$W' = U \bigoplus\nolimits^{\perp} H_k \bigoplus\nolimits^{\perp} \cdots \bigoplus\nolimits^{\perp} H_1$$

è un'estensione non degenere di W.

Dimostrazione. Per semplicità poniamo $U \oplus^\perp \operatorname{Span}(\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_{k-1}) = Z$, da cui $W = Z \oplus^\perp \operatorname{Span}(\underline{z}_k)$.

Cerchiamo un vettore $\underline{v}_k \in Z^\perp \backslash \underline{z}_k^\perp$, che sarà il nostro candidato per formare H_k. Osserviamo che $Z^\perp \backslash \underline{z}_k^\perp = \emptyset \implies Z^\perp \subset \underline{z}_k^\perp$, mostriamo allora che questo è un assurdo:

$$Z^\perp \subset \underline{z}_k^\perp \implies Z + Rad\varphi \supset \operatorname{Span}(\underline{z}_k) + Rad\varphi \implies \underline{z}_k \in Z,$$

ma Z e $\operatorname{Span}(\underline{z}_k)$ sono in somma diretta $\lightning$.

Sia allora $H_k = \operatorname{Span}(\underline{z}_k, \underline{v}_k)$. Mostriamo che H_k è un piano iperbolico:

- $W \subset \underline{z}_k^\perp$ e $\underline{v}_k \not\perp \underline{z}_k$, quindi $\underline{v}_k \notin W \ni \underline{z}_k$. Allora $\underline{z}_k$ e $\underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti, da cui $\dim H_k = 2$.
- $\underline{z}_k$ è isotropo e $\underline{z}_k \in H_k$ per costruzione, quindi $CI(\varphi|_{H_k}) \neq \{\underline{0}\}$.
- Data la base $\mathcal{B} = \{\underline{z}_k, \underline{v}_k\}$ abbiamo

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi|_{H_k}) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(\underline{z}_k, \underline{v}_k) \\ \varphi(\underline{z}_k, \underline{v}_k) & \varphi(\underline{v}_k, \underline{v}_k) \end{pmatrix}.$$

Siccome $\varphi(\underline{z}_k, \underline{v}_k) \neq 0$ per costruzione il rango di questa matrice è massimo, quindi $\varphi|_{H_k}$ è non degenere.

Mostriamo ora che Z e H_k sono in somma diretta ortogonale. Dato che $\underline{z}_k, \underline{v}_k \in Z^\perp$ troviamo che $Z \perp H_k$. Consideriamo allora un elemento dell'intersezione.

$$H_k \ni \alpha\underline{z}_k + \beta\underline{v}_k = \underline{z} \in Z$$

$$\beta \underbrace{\underline{v}_k}_{\notin W} = \underline{z} - \alpha \underline{z}_k \in W \implies \beta = 0$$

Ma $\underline{z}_k \notin Z$, quindi anche $\alpha = 0$, allora l'intersezione è banale e $H_k \oplus^{\perp} Z$.

Definiamo $W_1 = Z \oplus^{\perp} H_k = W \oplus \mathrm{Span}\,(\underline{v}_k)$. Sia $U_1 = U \oplus^{\perp} H_k \subset W_1$ e osserviamo che $\varphi|_{U_1}$ è non degenere in quanto φ ristretta a entrambi i membri della somma diretta ortogonale è non degenere.

Mostriamo $Rad(\varphi|_{W_1}) = \mathrm{Span}\,(\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_{k-1})$:

$\supset$) Osserviamo che $\forall 1 \le i < k$ abbiamo $\underline{z}_i \in W^{\perp} \cap \underline{v}_k^{\perp}$, quindi $\underline{z}_i \in W_1^{\perp}$.

dim) Essendo $\varphi|_{U_1}$ non degenere abbiamo $U_1 \cap Rad(\varphi|_{W_1}) = \{\underline{0}\}$, quindi

$$\dim Rad(\varphi|_{W_1}) \le \dim W_1 - \dim U_1 = \dim W + 1 - (\dim W - k + 2) = k - 1,$$

ma dato il contenimento precedente abbiamo $k - 1 \le \dim Rad(\varphi|_{W_1})$, quindi $\dim Rad(\varphi|_{W_1}) = k - 1$.

Possiamo reiterare questo procedimento considerando

$$W_1 = U_1 \bigoplus^{\perp} Rad(\varphi|_{W_1}) \text{ con } \{\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_{k-1}\} \text{ base di } Rad(\varphi|_{W_1}).$$

Eliminando ad ogni passo un vettore dalla base del radicale troviamo

$$W' = W_k = U \bigoplus^{\perp} H_k \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_1$$

estensione non degenere di W. □

Abbiamo quindi trovato un'estensione non degenere di W di dimensione $\dim W + \dim Rad(\varphi|_W)$.

Corollario 7.11.
L'estensione non degenere definita sopra è un completamento non degenere di W

Dimostrazione. Sia $\widetilde{W}$ un'estensione non degenere di W. L'unica proprietà di V che il procedimento riportato ha sfruttato è il fatto che $V \supset W$ e che $\varphi = \varphi|_V$ è non degenere, quindi possiamo considerare $\widetilde{W}$ al posto di V e ripetere lo stesso procedimento, trovando $W'' \subset \widetilde{W}$ isomorfo a W', quindi

$$\dim \widetilde{W} \ge \dim W + \dim Rad(\varphi|_W).$$

Allora W' è un'estensione non degenere di W di dimensione minima, ovvero un completamento non degenere. □

Corollario 7.12.
Ogni completamento non degenere di W è della forma

$$W' = U \bigoplus^{\perp} H_k \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_1.$$

Dimostrazione. Per quanto detto, ogni completamento non degenere ha dimensione $\dim W + \dim Rad(\varphi|_W)$. Allora dato $\widetilde{W}$ un completamento non degenere di W applichiamo l'algoritmo a W considerando $\widetilde{W}$ come ambiente, trovando un completamento $W' \subset \widetilde{W}$. Dato il contenimento e il fatto che hanno la stessa dimensione abbiamo che $W' = \widetilde{W}$. □

Corollario 7.13.
Tutti i completamenti non degeneri di un dato sottospazio W sono isometrici.

Dimostrazione. Consideriamo i due completamenti

$$U \oplus^{\perp} H_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} H_k$$

$$U' \oplus^{\perp} H_1' \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} H_k'$$

Tutti i piani iperbolici sono isometrici in quanto il campo non cambia, quindi in particolare troviamo una isometria tra H_i e H_i' per ogni i. In quanto supplementari del radicale, anche U e U' sono isometrici, quindi possiamo definire una isometria globale che estende ogni isometria sui termini della somma diretta ortogonale. □

7.3 Estensione delle isometrie con globale non degenere

Teorema 7.14.
Siano (V, φ) uno spazio vettoriale con φ non degenere e W, U suoi sottospazi isometrici tramite $g : W \to U$, allora esiste $f \in O(\varphi)$ tale che $f|_W = g$.

Dimostrazione. Sia Z un supplementare di $Rad(\varphi|_W)$ in W. Abbiamo quindi

$$W = Z \bigoplus^{\perp} Rad(\varphi|_W),$$

da cui

$$U = g(W) = g(Z) \bigoplus^{\perp} g(Rad(\varphi|_W)) = g(Z) \bigoplus^{\perp} Rad(\varphi|_U),$$

ovvero $g(Z)$ è un supplementare in U di $Rad(\varphi|_U)$. Sia $\mathcal{D} = \{\underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_k\}$ una base di $Rad(\varphi|_W)$ e $g(\mathcal{D}) = \{g(\underline{z}_1), \cdots, g(\underline{z}_k)\}$ una base di $Rad(\varphi|_U)$. Applichiamo l'algoritmo ad entrambi per trovare i seguenti completamenti non degeneri:

$$\hat{W} = Z \bigoplus^{\perp} \underset{\underline{z}_1 \in}{H_1} \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} \underset{\underline{z}_k \in}{H_k}$$

$$\hat{U} = g(Z) \bigoplus^{\perp} \underset{g(\underline{z}_1) \in}{H_1'} \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} \underset{g(\underline{z}_k) \in}{H_k'}.$$

Estendiamo quindi g a $g' : \hat{W} \to \hat{U}$ isometria. Poniamo $g'|_W = g$. Date $\underline{z}_i, \underline{v}_i$ base iperbolica di H_i e $g(\underline{z}_i), \underline{v}_i'$ base iperbolica di H_i' poniamo $g'(\underline{v}_i) = \underline{v}_i$.

Per il caso non degenere abbiamo che g' si estende a $f \in O(\varphi)$, ma dato che g' estende g abbiamo che f è un'estensione di g, da cui la tesi. □

Corollario 7.15.
Dato (V, φ) spazio vettoriale con φ non degenere abbiamo che se W, U sono sottospazi di V isometrici allora anche $W^{\perp}$ e $U^{\perp}$ sono isometrici.

Dimostrazione. Essendo W, U isometrici per il teorema sono congruenti, ovvero $\exists f \in O(\varphi)$ tale che $f(W) = U$. Allora

$$U^{\perp} = f(W)^{\perp} = f(W^{\perp}),$$

ovvero $W^{\perp}$ e $U^{\perp}$ sono congruenti, quindi sono anche isometrici tramite $f|_{W^{\perp}}$. □

7.4 Indice di Witt

Definizione 7.16 (Indice di Witt)**.**
Definiamo *l'indice di Witt* di un prodotto scalare φ come

$$W(\varphi) = \max\{\dim W \mid W \text{ sottospazio di } V \ t.c. \ \varphi|_W = 0\}$$

Nel caso di $A \in S(n, \mathbb{K})$ poniamo $W(A) = W(\phi_A)$.

Osservazione 7.17.
Dalla formula di polarizzazione 5.16 abbiamo la definizione equivalente:

$$W(\varphi) = \max\{\dim W \mid W \text{ sottospazio di } V \ t.c. \ W \subset CI(\varphi)\}.$$

Osservazione 7.18.
$W(\varphi) = 0 \iff \varphi$ anisotropo

Osservazione 7.19.
Dato $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ abbiamo $W(\lambda\varphi) = W(\varphi)$.

Osservazione 7.20.
$W(\varphi)$ è un invariante per isometria.

Osservazione 7.21.
La definizione ha senso anche per prodotti scalari degeneri. In questo caso osserviamo che $\varphi|_W = 0 \implies \varphi|_{W+Rad(\varphi)} = 0$, quindi se W è un sottospazio di V che realizza l'indice di Witt $Rad\varphi \subset W$.

Proposizione 7.22.
$W(\varphi) = \dim Rad(\varphi) + W(\overline{\varphi})$ con $\overline{\varphi}$ il prodotto scalare non degenere su ${}^{V}\!/_{Rad(\varphi)}$ associato a φ, equivalentemente $W(\varphi) = \dim Rad(\varphi) + \dim W(\varphi|_U)$ con U supplementare di $Rad(\varphi)$.

Dimostrazione.
$\geq$) Sia Z un sottospazio di U che realizza $W(\varphi|_U)$. Abbiamo $\varphi|_Z = 0$, da cui $\varphi|_{Z \oplus Rad(\varphi)} = 0$, quindi

$$W(\varphi) \geq \dim Z + \dim Rad(\varphi) = W(\varphi|_U) + \dim Rad(\varphi).$$

$\leq$) Sia $\hat{W}$ un sottospazio di V che realizza $W(\varphi)$ e decomponiamolo con $\hat{W} = U' \oplus Rad(\varphi)$. Estendiamo ora questa decomposizione in una di V come $V = (U'' \oplus U') \oplus^{\perp} Rad(\varphi)$. Osserviamo che $U'' \oplus U'$ è isometrico a U e che $U' \subset U'' \oplus U'$. Dato che $\varphi|_{U'} = 0$, applicando l'isometria citata vediamo che $\exists \hat{U} \subset U$ isometrico a U', e quindi $\varphi|_{\hat{U}} = 0$. Dunque

$$W(\varphi|_U) \geq \dim \hat{U} = \dim U' = \dim \hat{W} - \dim Rad(\varphi) = W(\varphi) - \dim Rad(\varphi).$$

□

Proposizione 7.23.

$$W(\varphi) \leq \frac{\dim V + \dim Rad(\varphi)}{2}.$$

Dimostrazione. Dato W sottospazio che realizza l'indice di Witt ($\varphi|_W = 0$), osserviamo che $W \subset W^{\perp}$. Quindi $W(\varphi) = \dim W \leq \dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim Rad(\varphi) \cap W$. Dato che $Rad(\varphi) \subset W$ abbiamo $Rad(\varphi) \cap W = Rad(\varphi)$, quindi

$$W(\varphi) \leq \dim V - W(\varphi) + \dim Rad(\varphi),$$

da cui la tesi. □

7.5 Decomposizione di Witt

Tornando al caso di φ non degenere, proviamo a costruire un completamento non degenere di un sottospazio che realizza l'indice di Witt

Osservazione 7.24.
Se W realizza l'indice di Witt, $Rad(\varphi|_W) = W$, quindi

$$\hat{W} = H_1 \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_{W(\varphi)}.$$

Osservazione 7.25.
Sia $A = \hat{W}^{\perp}$, da cui

$$V = A \bigoplus^{\perp} H_1 \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_{W(\varphi)}.$$

Osserviamo che $\varphi|_A$ è anisotropo, altrimenti se $\exists \underline{v} \in A \cap CI(\varphi)$ avremmo $Y = W \oplus^{\perp} \operatorname{Span}(\underline{v}) \subset CI(\varphi)$ ma $\dim Y = W(\varphi) + 1$ ↯.

Definizione 7.26 (Decomposizione di Witt)**.**
Una decomposizione del tipo

$$V = A' \bigoplus^{\perp} H'_1 \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H'_s,$$

con A' anisotropo e H'_i piani iperbolici è detta *decomposizione di Witt*

Proposizione 7.27.
Tutte le decomposizioni di Witt sono congruenti.

Dimostrazione. Consideriamo una decomposizione di Witt generica e una derivante dal completamento di un sottospazio che realizza l'indice di Witt:

$$V = A \bigoplus^{\perp} H_1 \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_{W(\varphi)}$$

$$V = A' \bigoplus^{\perp} H'_1 \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H'_s.$$

Consideriamo $\underline{w}_i \in H'_i$ isotropo non nullo: abbiamo che $\operatorname{Span}(\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_s) = U$ è tale che $\varphi|_U = 0$ e $\dim U = s$, quindi abbiamo $W(\varphi) \geq s$.

Supponiamo per assurdo che $s < W(\varphi)$ e definiamo

$$Z = H_1 \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_s, \qquad Z' = H_1' \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_s'.$$

Osserviamo che Z e Z' sono isometrici, quindi $Z^{\perp}$ e $Z'^{\perp}$ sono isometrici.

$$Z^{\perp} = A \bigoplus^{\perp} H_{s+1} \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_{W(\varphi)}, \qquad Z'^{\perp} = A',$$

ma questo è assurdo perché avremmo $\varphi|_{Z^{\perp}}$ non anisotropo (per esempio i vettori nelle basi iperboliche per i piani iperbolici) ma $\varphi|_{Z'^{\perp}}$ anisotropo $\lightning$. Ricaviamo quindi che $s = W(\varphi)$. Allora le somme dei piani iperbolici sono isometriche, quindi lo sono anche A e A'. Quanto mostrato definisce una isometria che porta una decomposizione nell'altra, quindi esse sono congruenti. $\square$

Corollario 7.28.
L'indice di Witt e la classe di isometria della parte anisotropa di una decomposizione di Witt sono invarianti completi per isometria nel caso di prodotti scalari non degeneri.

Definizione 7.29 (Decomposizione di Witt degenere)**.**
Dato φ (anche degenere) definiamo una *decomposizione di Witt* come

$$V = Rad(\varphi) \bigoplus^{\perp} \underbrace{A \bigoplus^{\perp} H_1 \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} H_{W(\varphi|_U)}}_{=U}$$

Osservazione 7.30.
Per quanto detto tutte le decomposizioni di Witt anche in questo caso sono congruenti.

Corollario 7.31.
Dato che $W(\varphi|_U) = W(\varphi) - \dim Rad(\varphi)$ abbiamo che $\dim Rad(\varphi), W(\varphi)$ e la classe di isometria di A sono invarianti completi per isometria.

7.5.1 Cartan-Dieudonné anisotropo

Proposizione 7.32.
Se φ è non degenere, data $f \in O(\varphi)$ abbiamo che $V = \text{Fix}\, f \oplus^{\perp} (\text{Fix}\, f)^{\perp}$.

Dimostrazione. Essendo φ non degenere abbiamo $\dim(\text{Fix}\, f)^{\perp} = \dim V - \dim \text{Fix}\, f$, quindi, per il contenimento ovvio e motivi dimensionali, basta mostrare che la loro intersezione è banale, ovvero che $\varphi|_{\text{Fix}\, f}$ è non degenere.

Sia $\underline{z} \in Rad(\varphi|_{\text{Fix}\, f}) = \text{Fix}\, f \cap (\text{Fix}\, f)^{\perp}$, da cui $\text{Fix}\, f = U \oplus^{\perp} \text{Span}\,(\underline{z})$. Essendo φ non degenere completiamo $\underline{z}$ a piano iperbolico H tale che $U \oplus^{\perp} H$. Se una base iperbolica di H è $\{\underline{z}, \underline{v}\}$, notiamo che $\underline{v} \notin \text{Fix}\, f$ per motivi dimensionali. Dato che le uniche matrici associate a un elemento del gruppo ortogonale su una base iperbolica sono della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $f|_H = id_H$, e quindi $\underline{v} \in \text{Fix}\, f$ $\lightning$. $\square$

Proposizione 7.33.
Dati φ non degenere e $f \in O(\varphi)$ abbiamo che $\dim \text{Fix}\, f = n - 1 \iff f$ è una riflessione ortogonale a $\text{Fix}\, f$.

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) Ovvio dalla definizione di riflessione.
$\Longrightarrow$) Dato che φ è non degenere $\dim(\text{Fix}\ f)^{\perp} = 1$, sia quindi $\underline{v}$ una sua base. Abbiamo quindi $V = \text{Span}\,(\underline{v}) \oplus^{\perp} \text{Fix}\, f$. Verifichiamo che $f = \rho_{\underline{v}}$:
Dalla definizione del fissatore

$$f|_{\text{Fix}\, f} = id_{\text{Fix}\, f} = \rho_{\underline{v}}|_{\underline{v}^{\perp}}.$$

Osserviamo che $\text{Span}\,(\underline{v})$ è $f-$invariante, altrimenti f non sarebbe iniettiva. Osserviamo anche che $\underline{v}$ non è isotropo in quanto ortogonale al suo supplementare e φ non degenere.

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{v})) = \lambda^2 \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \implies \lambda = \pm 1$$

Se $\lambda = 1$ allora $\underline{v} \in \text{Fix}\, f$ $\lightning$, quindi $f(\underline{v}) = -\underline{v}$. $\square$

Teorema 7.34.
Sia φ anisotropo, allora $f \in O(\varphi)$ è composizione di $n - \dim \text{Fix}\, f$ riflessioni ortogonali.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n-d$ con $d = \dim \mathrm{Fix}\, f$:
$n-d=0$) Abbiamo $V = \mathrm{Fix}\, f \implies f = id$, che è composizione di 0 riflessioni.
$n-d=1$) Per quanto detto $f=\rho$.
$n-d>1$) Assumiamo l'ipotesi induttiva, cioè $\forall g$ t.c. $\dim \mathrm{Fix}\, g = d+1$ abbiamo che $g = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_{n-d-1}$.

Dato che φ è non degenere abbiamo $V = \mathrm{Fix}\, f \oplus^{\perp} (\mathrm{Fix}\, f)^{\perp}$ e per $n-d>1$ si ha $\dim (\mathrm{Fix}\, f)^{\perp}$ non banale. Sia allora $\underline{w} \in (\mathrm{Fix}\, f)^{\perp} \backslash \{\underline{0}\}$. Essendo $(\mathrm{Fix}\, f)^{\perp}$ in somma diretta con $\mathrm{Fix}\, f$, abbiamo che $f(\underline{w}) - \underline{w} \neq \underline{0}$, quindi, essendo φ anisotropo, troviamo $f(\underline{w}) - \underline{w} \notin CI(\varphi)$. Poniamo allora $\rho = \rho_{f(\underline{w})-\underline{w}}$. Valutando in $f(\underline{w})$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\rho(f(\underline{w})) =& f(\underline{w}) - 2C(f(\underline{w}) - \underline{w}, f(\underline{w}))(f(\underline{w}) - \underline{w}) = \\
=& f(\underline{w}) - 2\frac{\varphi(f(\underline{w}) - \underline{w}, f(\underline{w}))}{\varphi(f(\underline{w}) - \underline{w}, f(\underline{w}) - \underline{w})}(f(\underline{w}) - \underline{w}) = \\
=& f(\underline{w}) - 2\frac{\varphi(f(\underline{w}), f(\underline{w})) - \varphi(\underline{w}, f(\underline{w}))}{\varphi(f(\underline{w}), f(\underline{w})) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}) - 2\varphi(f(\underline{w}), \underline{w})}(f(\underline{w}) - \underline{w}) = \\
=& f(\underline{w}) - 2\frac{\varphi(f(\underline{w}), f(\underline{w})) - \varphi(f(\underline{w}), \underline{w})}{\varphi(\underline{w}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}) - 2\varphi(f(\underline{w}), \underline{w})}(f(\underline{w}) - \underline{w}) = \\
=& f(\underline{w}) - 2\frac{1}{2}(f(\underline{w}) - \underline{w}) = \\
=& f(\underline{w}) - f(\underline{w}) + \underline{w} = \\
=& \underline{w},
\end{aligned}$$

quindi, ponendo $g = \rho \circ f$, vediamo che $g(\underline{w}) = \underline{w}$, cioè $\underline{w} \in \mathrm{Fix}\, g \backslash \mathrm{Fix}\, f$. Dato che $f(\underline{w}) - \underline{w} \in (\mathrm{Fix}\, f)^{\perp}$ abbiamo

$$\mathrm{Fix}\, f = ((\mathrm{Fix}\, f)^{\perp})^{\perp} \subset (f(\underline{w}) - \underline{w})^{\perp} = \mathrm{Fix}\, \rho.$$

Osserviamo che $\mathrm{Fix}\ f = \mathrm{Fix}\ \rho \cap \mathrm{Fix}\ f \subset \mathrm{Fix}\ g$, e siccome $\underline{w} \in \mathrm{Fix}\ g \backslash \mathrm{Fix}\ f$ abbiamo che $\dim \mathrm{Fix}\ g \geq \dim \mathrm{Fix}\, f + 1 = d+1$.

Osserviamo ora che $g = \rho \circ f \implies f = \rho \circ g$, quindi $\mathrm{Fix}\, f \supset \mathrm{Fix}\, \rho \cap \mathrm{Fix}\, g$, quindi $\dim \mathrm{Fix}\, f \geq \dim \mathrm{Fix}\, g - 1$, cioè $\dim \mathrm{Fix}\, g \leq d+1$.

Concludiamo quindi che $\dim \mathrm{Fix}\, g = d+1$, allora per ipotesi induttiva

$$f = \rho \circ g = \rho \circ \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_{n-d-1}.$$

Corollario 7.35 (Cartan Dieudonné nel caso anisotropo)**.**
Dato $\varphi \in PS(V)$ prodotto scalare anisotropo con $\dim V = n$ abbiamo che ogni elemento del gruppo ortogonale è esprimibile come composizione di al massimo n riflessioni ortogonali.

□

Capitolo 8

Classificazione dei prodotti scalari reali e complessi

8.1 Invarianti completi per prodotti scalari

8.1.1 Reali

Introduciamo delle categorie di prodotti scalari reali

Definizione 8.1 (Prodotti scalari (semi)definiti positivi/negativi).
φ prodotto scalare reale si dice

($\star$) *definito positivo*	$\forall \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$, $q_\varphi(\underline{v}) > 0$
($\star$) *definito negativo*	$\forall \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$, $q_\varphi(\underline{v}) < 0$
($\star$) *semidefinito positivo*	$\forall \underline{v} \in V$, $q_\varphi(\underline{v}) \geq 0$
($\star$) *semidefinito negativo*	$\forall \underline{v} \in V$, $q_\varphi(\underline{v}) \leq 0$

Se φ è definito positivo o definito negativo chiamiamo φ *definito*.

Osservazione 8.2.
φ definito $\implies$ φ anisotropo.

Dati φ definito positivo e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base ortogonale abbiamo $q_\varphi(\underline{v}_i) > 0$, quindi posso sostituire $\underline{v}_i$ con

$$\underline{v}_i' = \left(\frac{1}{\sqrt{q_\varphi(\underline{v}_i)}}\right) \underline{v}_i \in \operatorname{Span}(\underline{v}_i) \setminus \{\underline{0}\}.$$

In questo modo abbiamo una base ortogonale $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \cdots, \underline{v}_n'\}$ t.c. $q_\varphi(\underline{v}_i') = 1$

Definizione 8.3 (Base ortonormale).
Dato (V, φ) con φ definito positivo, una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale che $\forall \underline{v} \in \mathcal{B}$ abbiamo $q_\varphi(\underline{v}) = 1$ è detta *base ortogonale normalizzata* o *base ortonormale*. Equivalentemente è una base $\mathcal{B}$ tale che

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n.$$

Osservazione 8.4.
Tutti i prodotti scalari definiti positivi (fissato n) sono isometrici.

Osservazione 8.5.
Se φ è definito negativo allora $-\varphi$ è definito positivo, quindi $\exists \mathcal{B}$ base di V tale che

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = -I_n,$$

in particolare sono tutti isometrici.

Proposizione 8.6.
φ definito $\iff$ φ reale anisotropo.

Dimostrazione. $\implies$) Ovvio dalla definizione di definito.
$\impliedby$) Se φ fosse non definito $\exists \underline{v}, \underline{w} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ tali che $q_\varphi(\underline{v}) \geq 0$ e $q_\varphi(\underline{w}) \leq 0$. Per ipotesi φ è anisotropo, quindi $q_\varphi(\underline{v}) > 0$ e $q_\varphi(\underline{w}) < 0$. Consideriamo quindi $\underline{z} = \underline{v} + t\underline{w}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Se $\underline{z} = \underline{0}$ abbiamo $\underline{v} = -t\underline{w}$, da cui $0 > q_\varphi(\underline{v}) = t^2 q_\varphi(\underline{w}) < 0$, assurdo $\lightning$.
Se $\underline{z} \neq \underline{0}$ espandiamo la forma quadratica

$$q_\varphi(\underline{z}) = q_\varphi(\underline{v}) + 2t\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + t^2 q_\varphi(\underline{w}).$$

Questo è un polinomio a coefficienti reali di secondo grado in t, quindi ha radice se $\Delta \geq 0$. Valutiamo $\Delta/4$

$$\frac{\Delta}{4} = (\underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}_{\geq 0})^2 - \underbrace{q_\varphi(\underline{v})}_{>0} \underbrace{q_\varphi(\underline{w})}_{<0} > 0,$$

quindi per due valori di $t \in \mathbb{R}$ abbiamo che $\underline{v} + t\underline{w} \in CI(\varphi) \backslash \{\underline{0}\}$ $\lightning$. □

Per quanto detto nel capitolo scorso abbiamo che una decomposizione di Witt per (V, φ) reali è del tipo

$$V = Rad(\varphi) \bigoplus^\perp A \bigoplus^\perp H_1 \bigoplus^\perp \cdots \bigoplus^\perp H_s$$

con $\varphi|_A$ definito e $s = W(\varphi) - \dim Rad(\varphi)$.

Definizione 8.7 (Segno di un prodotto scalare reale)**.**
Data una decomposizione di Witt come sopra definiamo il *segno* di φ come

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi|_A \text{ definito positivo} \\ -1 & \text{se } \varphi|_A \text{ definito negativo} \\ 0 & \text{se } A = \{\underline{0}\} \end{cases}$$

Osservazione 8.8.
La terna

$$(\dim Rad(\varphi), W(\varphi), \operatorname{sgn}(\varphi))$$

è un invariante completo per isometria sui prodotti scalari reali fissata $\dim V$.

8.1.2 Complessi

I prodotti scalari anisotropi complessi sono soggetti a molte più restrizioni rispetto ai reali:

Proposizione 8.9.
φ non degenere e $\dim V \leq 1 \iff \varphi$ complesso anisotropo.

Dimostrazione. $\implies$) Ovvio.
$\impliedby$) Se $\dim V > 1$ abbiamo che $\exists \underline{v}, \underline{w} \in V$ linearmente indipendenti. Sia $t \in \mathbb{C}$ e consideriamo $\underline{v} + t\underline{w}$. Essendo $\underline{v}$ e $\underline{w}$ linearmente indipendenti, $\underline{v} + t\underline{w} \neq \underline{0}$. Consideriamo allora la forma quadrata

$$q_\varphi(\underline{v} + t\underline{w}) = q_\varphi(\underline{v}) + 2t\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + t^2 q_\varphi(\underline{w}) \in \mathbb{C}[t] \backslash \mathbb{C},$$

quindi per il teorema fondamentale dell'algebra, $\exists t$ tale che $q_\varphi(\underline{v} + t\underline{w}) = 0$, ovvero $\underline{v} + t\underline{w} \in CI(\varphi) \backslash \{\underline{0}\}$ $\lightning$.
Se $\dim V = 1$ e φ fosse degenere allora $\varphi = 0$, che non è anisotropo $\lightning$. □

Consideriamo allora una decomposizione di Witt per un prodotto scalare complesso

$$V = Rad(\varphi) \bigoplus^\perp A \bigoplus^\perp H_1 \bigoplus^\perp \cdots \bigoplus^\perp H_s$$

con $\dim A = 1, 0$. Osserviamo però che $\dim A$ è determinata dalla parità di $\dim V$ e $\dim Rad(\varphi)$, in particolare se hanno la stessa parità $\dim A = 0$, altrimenti $\dim A = 1$.
Notiamo in realtà che anche s è determinato da $\dim V$ e $\dim Rad(\varphi)$, infatti

$$s = \left\lfloor \frac{\dim V - \dim Rad(\varphi)}{2} \right\rfloor.$$

Osservazione 8.10.
Fissata $\dim V$ abbiamo che $\dim Rad(\varphi)$ è un invariante completo per isometria sui prodotti scalari complessi.

8.2 Rappresentazioni Matriciali

8.2.1 Complessi

Data una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di (V, φ) separiamo gli elementi non isotropi $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_k$ e $\underline{v}_{k+1}, \cdots, \underline{v}_n$. Per $i \leq k$ sostituiamo $\underline{v}_i$ con

$$\underline{v}_i' = t_i \underline{v}_i, \qquad \text{dove } t_i^2 = \frac{1}{q_\varphi(\underline{v}_i)}.$$

Troviamo quindi una base ortogonale normalizzata $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \cdots, \underline{v}_k', \underline{v}_{k+1}, \underline{v}_n\}$. In questo modo la matrice associata risulta della forma

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 8.11 (Classificazione dei prodotti scalari su $\mathbb{C}$)**.**
Dati (V, φ) e (W, ψ) spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ muniti di prodotto scalare, essi sono isometrici se e solo se $\dim V = \dim W$ *e* $\operatorname{rnk} \varphi = \operatorname{rnk} \psi$.

8.2.2 Reali

Consideriamo una base ortogonale $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di (V, φ) suddivisa come segue: $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_p$ hanno forma quadratica positiva, $\underline{v}_{p+1}, \cdots, \underline{v}_{p+q}$ hanno forma quadratica negativa e $\underline{v}_{p+q+1}, \cdots, \underline{v}_n$ sono isotropi.

Osserviamo che possiamo normalizzare i primi vettori sostituendo $\underline{v}_i$ con $\frac{1}{\sqrt{q_\varphi(\underline{v}_i)}}\underline{v}_i$ e i secondi con $\frac{1}{\sqrt{-q_\varphi(\underline{v}_i)}}\underline{v}_i$. Troviamo quindi una nuova base $\mathcal{B}'$ normalizzata tale che

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proviamo a mostrare che p e q sono degli invarianti completi per isometria.

Definizione 8.12 (Segnatura)**.**
Dato φ prodotto scalare reale definiamo

Indice di positività	$i_+(\varphi) = \max\{\dim W \mid \varphi\|_W \text{ definito positivo}\}$
Indice di negatività	$i_-(\varphi) = \max\{\dim W \mid \varphi\|_W \text{ definito negativo}\}$
Indice di nullità	$i_0(\varphi) = \dim Rad(\varphi)$.

Definiamo la *segnatura* di φ come la terna

$$\sigma(\varphi) = (i_+(\varphi), i_-(\varphi), i_0(\varphi)).$$

Osservazione 8.13.

- φ definito positivo $\iff \sigma(\varphi) = (n, 0, 0)$
- φ definito negativo $\iff \sigma(\varphi) = (0, n, 0)$
- φ semidefinito positivo $\iff \sigma(\varphi) = (a, 0, b)$
- φ semidefinito negativo $\iff \sigma(\varphi) = (0, a, b)$

Teorema 8.14 (Sylvester)**.**
Data una base ortogonale normalizzata $\mathcal{B}$ abbiamo $p = i_+(\varphi)$, $q = i_-(\varphi)$ e $n - p - q = i_0(\varphi)$

Dimostrazione. Come osservato prima possiamo separare la base in tre gruppi

$$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_p, \underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_q, \underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_{n-p-q}\},$$

dove $q_\varphi(\underline{v}_i) = 1$, $q_\varphi(\underline{w}_i) = -1$ e $q_\varphi(\underline{z}_i) = 0$. Sia $W = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_p)$, abbiamo $\varphi|_W = I_p$, ovvero $\varphi|_W$ definito positivo, quindi per definizione di indice di positività $i_+(\varphi) \geq \dim W = p$.

Sia ora $Z = \operatorname{Span}(\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_q, \underline{z}_1, \cdots, \underline{z}_{n-p-q})$. Osserviamo che $\varphi|_Z$ è semidefinito negativo.

Dato un qualsiasi U tale che $\varphi|_U$ è definito positivo mostriamo che $U \oplus Z$, infatti se avessimo $\underline{v} \in U \cap Z \setminus \{\underline{0}\}$ troveremmo $0 \leq q_\varphi(\underline{v}) > 0$ ↯.

Preso allora U che realizza $i_+(\varphi)$ abbiamo $V \supset U \oplus Z$, da cui $n \geq \dim U + \dim Z = i_+(\varphi) + q + n - p - q$, ovvero $i_+(\varphi) \leq p$.

Troviamo quindi che $i_+(\varphi) = p$ e analogamente $i_-(\varphi) = q$. Osserviamo infine che $n - p - q = \dim Rad(\varphi) = i_0(\varphi)$. □

Corollario 8.15.

$$i_+(\varphi) + i_-(\varphi) = \operatorname{rnk}\varphi$$
$$i_+(\varphi) + i_-(\varphi) + i_o(\varphi) = \dim V.$$

Teorema 8.16 (Classificazione dei prodotti scalari su $\mathbb{R}$)**.**
Dati (V,φ) e (W,ψ) spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ muniti di prodotto scalare, essi sono isometrici se e solo se $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$.

Vediamo la relazione tra la segnatura e la decomposizione di Witt. Osserviamo che la segnatura di un piano iperbolico è $(1,1,0)$, infatti non è degenere ($i_0 = 0$) e non è definito (quindi escludiamo $(2,0,0)$ e $(0,2,0)$).

$$V = \underbrace{Rad(\varphi)}_{\sigma=(0,0,i_0(\varphi))} \bigoplus^{\perp} \underbrace{A}_{\sigma=\begin{smallmatrix}(a,0,0)\\(0,a,0)\\(0,0,0)\end{smallmatrix}} \bigoplus^{\perp} \underbrace{H_1}_{\sigma=(1,1,0)} \bigoplus^{\perp} \cdots \bigoplus^{\perp} \underbrace{H_s}_{\sigma=(1,1,0)},$$

dove $a = \dim A$ e $\sigma(\varphi|_A)$ è determinata da $\operatorname{sgn}(\varphi|_A)$.

Osservazione 8.17.
In generale abbiamo

$$\sigma(\varphi|_{W\oplus U}) \neq \sigma(\varphi|_W) + \sigma(\varphi|_U),$$
$$\sigma(\varphi|_{W \oplus^{\perp} U}) = \sigma(\varphi|_W) + \sigma(\varphi|_U).$$

Combinando le segnature troviamo

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} (a+s, s, i_0(\varphi)) & \text{se } \operatorname{sgn}(\varphi|_A) = 1 \\ (s, a+s, i_0(\varphi)) & \text{se } \operatorname{sgn}(\varphi|_A) = -1 \\ (s, s, i_0(\varphi)) & \text{se } \operatorname{sgn}(\varphi|_A) = 0 \end{cases}$$

Data $\mathcal{B}$ una base ortogonale normalizzata possiamo osservare meglio la correlazione tra i due invarianti completi. Infatti presi un vettore a forma quadratica 1 e un altro a forma quadratica -1 (sotto chiamati $\underline{v}_1$ e $\underline{w}_1$) costruiamo un piano iperbolico.

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
\underline{\mathbf{v_1}} & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_{i_+} & \underline{\mathbf{w_1}} & \underline{w}_2 & \cdots & \underline{w}_{i_-} & \underline{z}_1 & \underline{z}_2 & \cdots & \underline{z}_{i_0} \\ \hline
\underline{\mathbf{1}} & 0 & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & 0 & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & \underline{\mathbf{-1}} & 0 & & & & & & \\
 & & & & 0 & -1 & \ddots & & & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\
 & & & & & & 0 & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & \ddots & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Possiamo ripetere questi accoppiamenti finché sono disponibili vettori con entrambi i segni. Abbiamo quindi

Osservazione 8.18.

$$W(\varphi) = \min(i_+(\varphi), i_-(\varphi)) + i_0(\varphi).$$

Osserviamo infine che

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } i_+(\varphi) > i_0(\varphi) \\ -1 & \text{se } i_+(\varphi) < i_0(\varphi) \\ 0 & \text{se } i_+(\varphi) = i_0(\varphi) \end{cases}.$$

8.3 Calcolo della segnatura

Ricordiamo alcuni fatti utili per calcolare la segnatura:

- $i_0(\varphi) = n - \text{rnk}\,(\varphi)$,
- $i_+ + i_- + i_0 = n \iff i_+ + i_- = \text{rnk}\,(\varphi)$,
- $V = W \oplus^\perp U \implies \sigma(\varphi) = \sigma(\varphi|_W) + \sigma(\varphi|_U)$,
- $\sigma(\varphi|_{W \oplus U}) \neq \sigma(\varphi|_W) + \sigma(\varphi|_U)$,
- $\sigma(\varphi|_{W \oplus^\perp U}) = \sigma(\varphi|_W) + \sigma(\varphi|_U)$.

Proposizione 8.19.
Per una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V abbiamo

$$\text{sgn}\ \det(M_\mathcal{B}(\varphi)) = (-1)^{i_-(\varphi)}\delta_{0,i_0(\varphi)}, \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Dimostrazione. Il termine con il delta di Kronecker è ovvio dal fatto che φ degenere $\iff \text{rnk}\,(\varphi) \neq \dim V$.

Restringiamoci al caso non degenere. Se $M = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)$ allora $M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M^\top M_\mathcal{B}(\varphi) M$, quindi $\det(M_{\mathcal{B}'}(\varphi)) = \det(M)^2 \det(M_\mathcal{B}(\varphi))$, ovvero, cambiando base, il determinante cambia di un fattore strettamente positivo, in particolare non cambia segno. Consideriamo allora una base ortogonale normalizzata

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_{i_+} & 0 \\ 0 & I_{i_-} \end{pmatrix}$$

il determinante in questo caso è chiaramente $1^{i_+}(-1)^{i_-} = (-1)^{i_-}$, che coincide con il proprio segno. □

Osservazione 8.20.
Su uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n ci sono esattamente $\binom{n+2}{2}$ prodotti scalari reali a meno di isometria.

Teorema 8.21 (Metodo di Jacobi)**.**
Sia φ un prodotto scalare reale anisotropo e sia $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Poniamo $\mathcal{B}_i = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_i\}$. Abbiamo che:

$$i_+ = |\{i \mid \text{sgn}\ \det M_{\mathcal{B}_i}(\varphi) = \text{sgn}\ \det M_{\mathcal{B}_{i+1}}(\varphi)\}| + \delta_{1,\text{sgn}\, q_\varphi(\underline{v}_1)},$$
$$i_- = |\{i \mid \text{sgn}\ \det M_{\mathcal{B}_i}(\varphi) \neq \text{sgn}\ \det M_{\mathcal{B}_{i+1}}(\varphi)\}| + \delta_{-1,\text{sgn}\, q_\varphi(\underline{v}_1)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\varphi|_{\underline{v}_1}$ è definito, quindi se positivo $i_+ \geq 1$ e se negativo $i_- \geq 1$.

Consideriamo adesso un sottospazio W di V e una sua estensione W' tale che $\dim W' = \dim W + 1$. Quindi se $\mathcal{B}_W$ è una base di W abbiamo che una base di W' può avere la forma $\mathcal{B}_W \cup \underline{w}' = \mathcal{B}_{W'}$. Le ipotesi ci garantiscono $\varphi|_W$ e $\varphi|_{W'}$ non degeneri, quindi $\det M_{\mathcal{B}_W}(\varphi) \neq 0$ e $\det M_{\mathcal{B}_{W'}}(\varphi) \neq 0$.

Possiamo supporre senza ledere generalità che $\underline{w}' \perp W$ a meno di proiettare $\underline{w}'$ su $W^\perp$. La situazione matriciale è quindi

$$M_{\mathcal{B}_{W'}}(\varphi) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_W}(\varphi) & 0 \\ 0 & q_\varphi(\underline{w}') \end{pmatrix} \implies q_\varphi(\underline{w}') = \frac{\det M_{\mathcal{B}_{W'}}(\varphi)}{\det M_{\mathcal{B}_W}(\varphi)}.$$

Se $q_\varphi(\underline{w}') > 0$ abbiamo che $i_+(\varphi|_{W'}) = i_+(\varphi|_W) + 1$ e $i_-(\varphi|_{W'}) = i_-(\varphi|_W)$, mentre per $q_\varphi(\underline{w}') < 0$ abbiamo la situazione simmetrica. Riassumendo, se il determinante mantiene il segno aumenta i_+, mentre se il segno cambia aumenta i_-.

Data una base possiamo costruire una bandiera $\{\text{Span}\,(\mathcal{B}_i) = V_i\}_{i=1,\cdots,n}$ usando la notazione del testo, da cui, considerando $W = V_i$ e $W' = V_{i+1}$ segue la tesi applicando ricorsivamente quanto detto. □

Osservazione 8.22.
In realtà il metodo funziona anche per prodotti scalari non degeneri e indirettamente anche su degeneri dove $\text{rnk}\,(\varphi) = \dim V - 1$, ma va scelta una base ordinata in modo tale da non trovare determinanti nulli.

Anche se troviamo sempre determinanti nulli definitivamente, fino a che non si annullano possiamo imporre dei limiti inferiori a i_+ e i_-.

Capitolo 9

Teorema Spettrale e Prodotti Hermitiani

9.1 Aggiunto di un endomorfismo

Dato uno spazio vettoriale (V, φ) con φ non degenere abbiamo che l'omomorfismo di rappresentazione associato a φ è iniettivo ($\ker F_\varphi = Rad(\varphi)$)

$$F_\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \underline{v} & \longmapsto & \varphi(\underline{v}, \,\cdot\,) \end{array},$$

e dato che per dimensione finita $\dim V = \dim V^*$ abbiamo che F_φ è un isomorfismo. Consideriamo allora il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "f^\top"] & V^* \\ V \arrow[u, "F_\varphi"] & V \arrow[u, "F_\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Definiamo allora un endomorfismo su V che chiuda e renda il diagramma commutativo

Definizione 9.1 (Aggiunto di un endomorfismo)**.**
Dato $f \in \operatorname{End}(V)$ definiamo *l'aggiunto* di f come

$$f^* = F_\varphi^{-1} \circ f^\top \circ F_\varphi$$

Abbiamo quindi un endomorfismo sugli endomorfismi

$$* : \begin{array}{ccc} \operatorname{End}(V) & \longrightarrow & \operatorname{End}(V) \\ f & \longmapsto & f^* \end{array}$$

Osservazione 9.2 (Cambio Argomento)**.**
Consideriamo ora due cammini sul diagramma che ci portano da V a V^*:

$$f^\top \circ F_\varphi = F_\varphi \circ f^*.$$

Abbiamo quindi $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}),$$

cioè prendere l'aggiunta ci permette di cambiare l'argomento dell'endomorfismo dentro un prodotto scalare.

Essendo f^* l'unico endomorfismo che completa il diagramma, questa è in realtà una seconda definizione implicita per l'aggiunto.

Fissando una base possiamo tradurre queste espressioni in forma matriciale: Data $\mathcal{B}$ base e poste $M = M_\mathcal{B}(\varphi)$, $A = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f)$, $A^* = M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f^*)$, abbiamo

$$[\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M A [\underline{w}]_\mathcal{B} = (A^*[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M [\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top (A^*)^\top M [\underline{w}]_\mathcal{B},$$

$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, quindi troviamo

$$MA = (A^*)^\top M \implies A^* = M^{-1} A^\top M.$$

Osservazione 9.3.
Gli aggiunti rispettano le seguenti proprietà

$$(f+g)^* = f^* + g^*, \quad (\lambda f)^* = \lambda f^*, \quad (id)^* = id,$$

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*, \quad (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}, \quad (f^*)^* = f.$$

Proposizione 9.4.
$\ker f^* = (\operatorname{Imm} f)^\perp$ *e per* φ *non degenere abbiamo* $(\ker f)^\perp = \operatorname{Imm} f^*$

Dimostrazione. Sia $\underline{w} \in \ker f^*$, ovvero $f^*(\underline{w}) = \underline{0}$. Allora troviamo che $\forall \underline{v} \in V$

$$0 = \varphi(\underline{v}, f^*(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) \iff \underline{w} \in (\operatorname{Imm} f)^\perp.$$

Da questo risultato proviamo a sviluppare l'ortogonale (ricordiamo che $(f^*)^* = f$):

$$(\ker f)^\perp = ((\operatorname{Imm} f^*)^\perp)^\perp = \operatorname{Imm} f^* + Rad(\varphi) = \operatorname{Imm} f^*.$$

□

Proposizione 9.5.
Se $f \in O(\varphi)$ *e* φ *è non degenere allora* $f^* = f^{-1}$

Dimostrazione. Dati due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ abbiamo che

$$\varphi(\underline{v}, f^{-1}(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), f(f^{-1}(\underline{w}))) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}),$$

da cui $f^{-1} = f^*$ per l'unicità di f^*. □

Definizione 9.6 (Endomorfismi autoaggiunti)**.**
Dato che $* : \operatorname{End}(V) \to \operatorname{End}(V)$ è tale che $*^2 = id$ abbiamo che $*$ è diagonalizzabile con spettro ± 1. Troviamo allora una decomposizione dello spazio degli endomorfismi

$$\operatorname{End}(V) = V_1(*) \bigoplus^\perp V_{-1}(*)$$

Gli elementi del primo sottospazio sono detti *autoaggiunti* e quelli del secondo *anti-autoaggiunti.*

Ricordiamo che l'applicazione

$$\chi : \begin{array}{ccc} \operatorname{End}(V) & \longrightarrow & Bil(V \times V^*, \mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \chi(f) : \begin{array}{ccc} V \times V^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\underline{v}, g) & \longmapsto & g(f(\underline{v})) \end{array} \end{array}$$

è un isomorfismo tra $\operatorname{End}(V)$ e $Bil(V \times V^*, \mathbb{K})$. Tramite l'isomorfismo di rappresentazione F_φ definiamo

$$b_\varphi : \begin{array}{ccc} Bil(V \times V^*, \mathbb{K}) & \longrightarrow & Bil(V) \\ \psi & \longmapsto & b_\varphi(\psi) : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\underline{v}, \underline{w}) & \longmapsto & \psi(\underline{v}, F_\varphi(\underline{w})) \end{array} \end{array}.$$

Proposizione 9.7.
b_φ *è un isomorfismo*

Dimostrazione. $b_\varphi(\psi)$ è bilineare perché anche ψ lo è e F_φ preserva la linearità su decondo argomento. b_φ è chiaramente lineare.

$\ker b_\varphi = \{\psi \mid \psi(\underline{v}, F_\varphi(\underline{w})) = 0, \forall \underline{v}, \underline{w}\}$, ma essendo F_φ surgettiva abbiamo che $\psi(\underline{v}, g) = 0$ per ogni $g \in V^*, \underline{v} \in V$, quindi ψ coincide con 0.

Infine osserviamo che $\dim Bil(V \times V^*, \mathbb{K}) = \dim Bil(V) = n^2$. □

Abbiamo quindi l'isomorfismo $\chi_\varphi = b_\varphi \circ \chi$, ovvero

$$\chi_\varphi : \begin{array}{ccc} \operatorname{End}(V) & \longrightarrow & Bil(V) \\ f & \longmapsto & \chi_\varphi(f) : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\underline{v}, \underline{w}) & \longmapsto & \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) \end{array} \end{array}.$$

Abbiamo trovato un isomorfismo tra $\operatorname{End}(V)$ e $Bil(V)$ che rispetta la decomposizione $V_1(*) \oplus V_{-1}(*) \to PS(V) \oplus A(V)$.

9.2 Spazi euclidei

Definizione 9.8 (Spazio euclideo)**.**
(V, φ) è uno *spazio euclideo*, se V è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e φ è definito positivo.

Prendiamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ su uno spazio euclideo. Allora $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$ e il passaggio a coordinate $[\ ]_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ è una isometria tra (V, φ) e $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$.

Osservazione 9.9.
Preso (V, φ) spazio euclideo con $\mathcal{B}$ base ortonormale, essendo φ definito positivo, abbiamo φ anisotropo. Abbiamo quindi, ponendo $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C(\underline{v}, \underline{v}_1) \\ \vdots \\ C(\underline{v}, \underline{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}, \underline{v}_1)/1 \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}, \underline{v}_n)/1 \end{pmatrix},$$

ovvero le coordinate sono i prodotti scalari tra i vettori base e il vettore che viene rappresentato.

Proposizione 9.10.
f autoaggiunto se e solo se per $\mathcal{B}$ ortonormale abbiamo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in S(n, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) Se $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in S(n, \mathbb{R})$ con $\mathcal{B}$ base ortonormale allora, dato che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$

$$A^* = I^{-1} A^\top I = A^\top = A.$$

$\Longrightarrow$) Considerando una base ortonormale troviamo che

$$A = A^* = I^{-1} A^\top I = A^\top,$$

ovvero $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A \in S(n, \mathbb{R})$. □

9.3 Teorema spettrale reale

Proposizione 9.11.
$P \in O(n, \mathbb{R})$ se e solo se $\exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ortonormali tali che $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id) = P$.

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) Date due basi ortonormali $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sia $P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id)$ la mattrice del cambio di base. Dato che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = I$ troviamo che

$$I = P^\top I P = P^\top P,$$

ovvero P ortogonale ($P \in O(n, \mathbb{R})$).
$\Longrightarrow$) Se $\mathcal{B}$ è ortonormale e $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id) = P$ è ortogonale vediamo che

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^\top I P = P^{-1} P = I,$$

cioè $\mathcal{B}'$ è ortonormale. □

Definizione 9.12 (Endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile)**.**
Un endomorfismo f si dice *ortogonalmente diagonalizzabile* se esiste una base ortonormale per φ di autovettori per f.

In termini matriciali abbiamo A ortogonalmente diagonalizzabile se $\exists P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $P^\top A P = P^{-1} A P$ diagonale.

Proposizione 9.13.
Se $f \in \operatorname{End}(V)$ è ortogonalmente diagonalizzabile allora f è autoaggiunto.
Equivalentemente se $A \in M(n, \mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile allora A è simmetrica.

Dimostrazione. Mostriamo la seconda forma: abbiamo $A = PDP^{-1} = PDP^\top$ con D diagonale, allora $A^\top = PD^\top P^\top = PDP^\top = A$. □

Lemma 9.14.
Un endomorfismo autoaggiunto è anche triangolabile.

Dimostrazione. Sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ per una base ortonormale $\mathcal{B}$. Essendo f autoaggiunto abbiamo $A = A^\top$, ovvero $A \in S(n, \mathbb{R})$. Consideriamo $A_{\mathbb{C}} = A$ l'immersione di A nelle matrici simmetriche a coefficienti complessi. Abbiamo che $p_{A_{\mathbb{C}}}(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{C}[t]$, quindi basta dimostrare che $sp(A_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di $A_{\mathbb{C}}$, abbiamo quindi che $\exists \underline{v} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\underline{0}\}$ tale che $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$. Osserviamo che vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\overline{\lambda}\underline{v}^\top \overline{\underline{v}} = \underline{v}^\top (\overline{A\underline{v}}) = \underline{v}^\top A \overline{\underline{v}} = \underline{v}^\top A^\top \overline{\underline{v}} = (A\underline{v})^\top \overline{\underline{v}} = \lambda \underline{v}^\top \underline{v}.$$

Dimostriamo allora che $\mathbb{C} \ni \underline{v}^\top \underline{v} \neq 0$:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \implies \underline{v}^\top \underline{v} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \geq 0$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $z_i = 0$, ovvero se $\underline{v} = \underline{0}$, ma questo non è il caso per ipotesi, quindi $\underline{v}^\top \underline{v} > 0$.

Possiamo quindi concludere riprendendo gli estremi della catena di uguaglianze:

$$\overline{\lambda}\cancel{\underline{v}^\top \underline{v}} = \lambda \cancel{\underline{v}^\top \underline{v}} \iff \overline{\lambda} = \lambda \iff \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Teorema 9.15 (Teorema Spettrale reale)**.**
Sia (V, φ) uno spazio euclideo e f un endomorfismo autoaggiunto, allora f è ortogonalmente diagonalizzabile.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $\dim V$.
$n = 1$) Ogni endomorfismo è diagonalizzabile e ogni base è ortogonale.
$n > 1$) Essendo f autoaggiunto, esso è triangolarizzabile, quindi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di f e $\exists \underline{v}$ autovettore di f relativo a λ. Ricordiamo che ϕ è anisotropo in quanto definito positivo. Consideriamo allora $\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{q_\varphi(\underline{v})}} \underline{v}$, in modo tale che $q_\varphi(\underline{v}_1) = 1$ e $\underline{v}_1$ autovettore per f relativo a λ. Consideriamo la decomposizione $V = \operatorname{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \underline{v}_1^\perp$, osservando che $\varphi|_{\underline{v}_1^\perp}$ rimane definito positivo.

Mostriamo allora che $\underline{v}_1^\perp$ è $f-$invariante, ovvero $f|_{\underline{v}_1^\perp}$ è un endomorfismo di $\underline{v}_1^\perp$ autoaggiunto rispetto a $\varphi|_{\underline{v}_1^\perp}$. Dato $\underline{w} \in \underline{v}_1^\perp$

$$\varphi(\underline{v}_1, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}_1), \underline{w}) = \lambda \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) = \lambda 0 = 0 \implies f(\underline{w}) \in \underline{v}_1^\perp.$$

Per ipotesi induttiva quindi $\exists \{\underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale per $(\underline{v}_1^\perp, \varphi|_{\underline{v}_1^\perp})$ di autovettori per $f|_{\underline{v}_1^\perp}$, quindi $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ è una base ortonormale per (V, φ) che diagonalizza f. □

Proponiamo una seconda dimostrazione più rapida ma non costruttiva:

Dimostrazione. Per il lemma f è triangolabile, ovvero $\exists \mathcal{D}$ base tale che $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$ è triangolare. Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt 5.3.2 a $\mathcal{D}$ e normalizzando troviamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = T$ triangolare superiore. Essendo $\mathcal{B}$ ortonormale abbiamo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = T^\top$ triangolare inferiore, ma dato che f è autoaggiunto $T = T^\top$, quindi T in realtà è diagonale. □

Osservazione 9.16.
Gli autospazi di f nelle ipotesi del teorema spettrale sono in somma diretta ortogonale, infatti presi $\lambda, \mu \in sp(f)$ diversi consideriamo $\underline{v} \in V_\lambda(f), \underline{w} \in V_\mu(f)$

$$\lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu \underline{w}) = \mu \varphi(\underline{v}, \underline{w}),$$

quindi $(\lambda - \mu)\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$, da cui $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.

Possiamo riformulare il teorema spettrale come segue

Teorema 9.17 (Teorema spettrale reale)**.**
Sia (V, φ) uno spazio Euclideo e f un endomorfismo autoaggiunto, allora

$$sp(f) \subset \mathbb{R}, \qquad V = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)}^{\perp} V_\lambda(f).$$

Corollario 9.18.
Sia (V, φ) uno spazio Euclideo, allora $\forall \psi \in PS(V)$, $\exists \mathcal{B}$ base di V ortonormale per φ e ortogonale per φ.

Dimostrazione. Scriviamo ψ in modo unico come

$$\psi = \chi_\varphi(f) = ((\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}))$$

per $f \in \operatorname{End}(V)$ autoaggiunto. Per il teorema spettrale abbiamo una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ ortonormale per φ che diagonalizza f. Poniamo $f(\underline{v}_i) = \lambda_i \underline{v}_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, da cui se $i \neq j$ troviamo

$$\psi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi(f(\underline{v}_i), \underline{v}_j) = \lambda_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0,$$

quindi $\mathcal{B}$ è ortogonale per ψ. □

Effettivamente questo corollario è equivalente al teorema spettrale reale

Dimostrazione. Dato $f \in \operatorname{End}(V)$ autoaggiunto consideriamo $\psi = \chi_\varphi(f)$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base ortonormale per φ e ortogonale per ψ. Mostriamo che $\mathcal{B}$ è di autovettori per f. Scriviamo $f(\underline{v}_i)$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$: $f(\underline{v}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \underline{v}_j$. Se $i \neq j$ abbiamo

$$0 = \psi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi(f(\underline{v}_i), \underline{v}_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \varphi(\underline{v}_k, \underline{v}_j) = \alpha_{ij} \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_j) = \alpha_{ij}.$$

□

Come sempre forniamo una interpretazione matriciale di questi risultati.

Teorema 9.19 (Teorema spettrale reale in forma matriciale)**.**
$\forall A \in S(n, \mathbb{R})$,$\exists P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP$ diagonale. Equivalentemente $\forall \phi_M \in PS(\mathbb{R}^n)$, $M \in S(n, \mathbb{R})$, $\exists P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $P^\top MP$ è diagonale.

9.3.1 Radice quadrata di matrici simmetriche

Proposizione 9.20.
Sia $A \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva (ϕ_A è definito positivo). Abbiamo che $\exists! S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva tale che $S^2 = A$.

Dimostrazione. Per il teorema spettrale reale $\exists P \in O(n, \mathbb{R})$ t.c. $P^{-1}AP = D$ diagonale. Essendo A definita positiva abbiamo

$$D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad \lambda_i > 0.$$

Ponendo

$$D' = diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) \implies (D')^2 = D,$$

da cui, ponendo $S = P^\top D' P$ abbiamo $S^2 = P^\top (D')^2 P = P^\top DP = A$.
Quindi una radice quadrata esiste, mostriamone l'unicità: essendo A definita positiva essa è diagonalizzabile per il teorema spettrale, quindi

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(A)} V_\lambda(A).$$

Osserviamo che $A|_{V_\lambda(A)} = \lambda I$, sia dunque $T^2 = A$. Notiamo che $TA = T^3 = AT$, quindi gli autospazi sono invarianti per T e A. Per quanto detto $T^2|_{V_\lambda(A)} = \lambda I$, da cui $\mu_{T|_{V_\lambda(A)}} \mid x^2 - \lambda = (x - \sqrt{\lambda})(x + \sqrt{\lambda})$. Essendo T definita positiva può avere solo autovalori positivi, quindi $\mu_{T|_{V_\lambda(A)}} = x - \sqrt{\lambda}$, da cui $T|_{V_\lambda(A)} = \sqrt{\lambda} I$.

Avendo identificato T in modo univoco sulle restrizioni abbiamo che T è univocamente definita su $\mathbb{R}^n$. □

Proposizione 9.21 (Decomposizione polare)**.**
Data $A \in GL(n, \mathbb{R})$ allora $\exists!(P, S)$ tali che $A = PS$ con $P \in O(n, \mathbb{R})$ e $S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva.

Dimostrazione. Procediamo con equivalenze dalla tesi. Se $A = PS$ allora $P = AS^{-1}$ è univocamente determinata da A e S. Osserviamo inoltre che, sempre supponendo la tesi

$$A^\top A = (PS)^\top PS = SP^\top PS = S^2,$$

inoltre $A^\top A$ è simmetrica e $\underline{x}^\top A^\top A \underline{x} = (A\underline{x})^\top (A\underline{x}) > 0$, ovvero $A^\top A$ è definita positiva. Abbiamo quindi trovato che se la tesi vale allora S è la radice quadrata di $A^\top A$.

Motivati da questo definiamo S come la radice quadrata di $A^\top A$. Se $P = AS^{-1}$ è ortogonale la tesi vale per quanto detto sopra.

$$\begin{aligned} PP^\top =& (AS^{-1})(AS^{-1})^\top = AS^{-1}S^{-1}A^\top = A(S^2)^{-1}A^\top = \\ =& A(A^\top A)^{-1}A^\top = AA^{-1}(A^\top)^{-1}A^\top = \\ =& I. \end{aligned}$$

□

9.4 Prodotti Hermitiani

Come abbiamo visto nel capitolo precedente i prodotti scalari complessi hanno una struttura molto semplice rispetto ai prodotti scalari reali, ma è possibile definire un oggetto simile al prodotto scalare che conserva molte proprietà dei prodotti scalari reali, ovvero il prodotto Hermitiano

Definizione 9.22 (Prodotto Hermitiano)**.**
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, un *prodotto Hermiatiano* su V è una mappa $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ lineare nel primo argomento e tale che

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})}.$$

Osservazione 9.23.
Una classificazione equivalente dei prodotti Hermitiani è una mappa $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ lineare nel primo argomento e anti-lineare nel secondo, dove f è antilineare se $f(\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}) = \overline{\alpha} f(\underline{v}) + \overline{\beta} f(\underline{w})$:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \overline{\varphi(\underline{w}_1 + \underline{w}_2, \underline{v})} = \overline{\varphi(\underline{w}_1, \underline{v})} + \overline{\varphi(\underline{w}_2, \underline{v})} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}_2),$$
$$\varphi(\underline{v}, \lambda\underline{w}) = \overline{\varphi(\lambda\underline{w}, \underline{v})} = \overline{\lambda\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{\lambda}\varphi(\underline{v}, \underline{w}).$$

Come per i prodotti scalari, fissata una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ possiamo rappresentare un prodotto Hermitiano φ con la matrice

$$H = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

Osserviamo quindi che

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_i v_i^*(\underline{v}) \sum_j \overline{v_j^*(\underline{w})}\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top H \overline{[\underline{w}]_{\mathcal{B}}}.$$

Inoltre, la proprietà che definisce i prodotti Hermitiani ($\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})}$) ci informa che le matrici che li rappresentano sono le H tali che $H = \overline{H^\top}$.

Definizione 9.24 (Matrice Hermitiana)**.**
Una matrice $H \in M(n, \mathbb{C})$ è *Hermitiana* se $H = \overline{H}^\top$.

Osservazione 9.25.

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) \overline{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)}$$

Osservazione 9.26.
Se $V = \mathbb{C}^n$ allora i prodotti Hermitiani sono tutti della forma

$$(\underline{x}, \underline{y}) \to \underline{x}^\top H \overline{\underline{y}}, \quad H \text{ Hermitiana.}$$

Osservazione 9.27.
Possiamo definire una forma quadratica analoga per i prodotti Hermitiani: siccome $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, abbiamo che $q_\varphi(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$ è una mappa a valori reali.

Una volta poste queste definizioni, tutta la trattazione fatta sui prodotti scalari rimane valida. In particolare sono ben definiti:

- Radicale: $Rad(\varphi) = \{\underline{v} \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \forall \underline{w} \in V\}$.
- Cono isotropo: $CI(\varphi) = \{\underline{v} \mid q_\varphi(\underline{v}) = 0\}$.
- Rango: $\operatorname{rnk}\varphi = \operatorname{rnk} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ per una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V. Come visto sopra il cambio di base consiste nel moltiplicare l'associata per matrici invertibili ($M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)^\top$ e $\overline{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)}$), quindi il rango non cambia tra le associate allo stesso prodotto Hermitiano. Inoltre osserviamo che $[Rad(\varphi)]_{\mathcal{B}} = \ker M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, quindi vale $\operatorname{rnk}(\varphi) = \dim V - \dim Rad(\varphi)$.
- Non degenericità: φ non degenere se $\dim Rad(\varphi) = 0$, equivalentemente $\operatorname{rnk}(\varphi) = \dim V$.
- Ortogonalità: $\underline{v} \perp \underline{w} \iff \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.
- Isometria: $f : (V, \varphi) \to (W, \psi)$ è isometria se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \psi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$.
- Base ortogonale: Una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ è ortogonale per il prodotto Hermitiano φ se $\forall i \neq j\ \underline{v}_i \perp_\varphi \underline{v}_j$. La dimostrazione proposta per l'esistenza resta invariata 5.22. Anche l'algoritmo di Gram-Schmidt 5.3.2 resta invariato. Osserviamo che in una base ortogonale, la matrice associata è diagonale e le entrate sono le forme quadratiche dei vettori base; per quanto detto sulla forma quadratica Hermitiana quei valori sono reali.

- Riflessioni ortogonali: $\rho_{\underline{v}}$ è la mappa tale che $\rho_{\underline{v}}|_{\text{Span}(\underline{v})} = -id$, $\rho_{\underline{v}}|_{\underline{v}^\perp} = id$. Seguono i teoremi sulle congruenze nel caso non degenere.
- Piano Iperbolico: H di dimensione 2 dove φ è non degenere ma non anisotropo. La dimostrazione del fatto che sono tutti isometrici non cambia ma β viene sostituito da $\overline{\beta}$.
- Teoria di Witt: I completamenti non degeneri rimangono della stessa forma. Anche l'indice di Witt ha la stessa definizione e la trattazione che porta alla decomposizione di Witt è invariata se non per qualche sostituzione triviale con dei coniugati.
- Basi normalizzate: Prendiamo una diagonale e normalizziamo i vettori dividendo i non isotropi per $\sqrt{|q_\varphi(\underline{v})|}$.
- Definito/Semidefinito positivo e negativo: Come detto, $q_\varphi : V \to \mathbb{R}$, quindi basta imporre gli stessi segni. Come per il caso reale abbiamo che φ Hermitiano è anisotropo se e solo se è definito (la dimostrazione è invariata 8.6). Definendo il segno abbiamo degli invarainti completi per i prodotti Hermitiani.
- Segnatura: Il teorema di Sylvester 8.14 continua a valere, quindi abbiamo che la segnatura Hermitiana rimane un invariante completo per isometria.

9.4.1 Teorema spettrale Hermitiano

Consideriamo ora il caso di prodotti Hermitiani definiti positivi e definiamo l'analogo delle basi ortonormali e del gruppo ortogonale

Definizione 9.28 (Base Unitaria)**.**
Dato un prodotto Hermitiano φ definito positivo, una base $\mathcal{B}$ è *unitaria* per φ se $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$.

Definizione 9.29 (Gruppo unitario)**.**
Dato un prodotto Hermitiano φ, il suo *gruppo unitario* è

$$U(\varphi) = \{f \in GL(V) \mid f : (V, \varphi) \to (V, \varphi) \text{ isometria}\}.$$

Nel caso φ sia definito positivo poniamo

$$U(n, \mathbb{C}) = U(\phi_{I_n}) = \{P \in GL(n, \mathbb{C}) \mid P^{-1} = \overline{P}^\top\}$$

il *gruppo unitario classico.*

Osservazione 9.30.
Il gruppo unitario classico sono le matrici del cambio di base tra basi unitarie.

Definizione 9.31 (Aggiunto (Hermitiano) di un endomorfismo)**.**
Dati $f \in \text{End}(V)$ e φ prodotto Hermitiano su V è ben definito l'endomorfismo $f^* \in \text{End}(V)$ tale che

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w})$$

che chiamiamo *aggiunto* di f.

Osservazione 9.32.
Nel caso $\mathcal{B}$ base unitaria abbiamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}^\top$$

Definizione 9.33 (Endomorfismo unitario)**.**
Un endomorfismo f è *unitario* se $f^* = f^{-1}$. Passando a coordinate in una base unitaria corrispondono alle matrici unitarie.

Vorremmo caratterizzare gli endomorfismi unitariamente diagonalizzabili, cioè quelli per i quali esiste una base unitaria che li diagonalizza. Scopriremo che sono esattamente quelli della forma seguente:

Definizione 9.34 (Endomorfismo normale)**.**
Un endomorfismo f è *normale* se commuta con il suo aggiunto, ovvero

$$f \circ f^* = f^* \circ f.$$

Analogamente una matrice A è normale se

$$A\overline{A}^\top = \overline{A}^\top A.$$

Osservazione 9.35.
Esempi di endomorfismi normali sono gli autoaggiunti, gli antiautoaggiunti e gli unitari.

Proposizione 9.36.
Se f è un endomorfismo unitariamente diagonalizzabile allora è normale.

Dimostrazione. Dalla definizione $\exists \mathcal{B}$ base unitaria tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = D$ diagonale. Per le proprietà degli aggiunti sulle basi unitarie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = \overline{D}^{\top}$, la quale è comunque una matrice diagonale. Dato che le matrici diagonali commutano abbiamo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ f^*) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^* \circ f),$$

quindi $f \circ f^* = f^* \circ f$ in quanto coincidono su una base. □

Lemma 9.37.
Dato f normale abbiamo che $V_\lambda(f) = V_{\overline{\lambda}}(f^*)$

Dimostrazione. Dato che $(f^*)^* = f$ basta mostrare $V_\lambda(f) \subset V_{\overline{\lambda}}(f^*)$:
Sia $\underline{v}$ un autovettore di f relativo a λ. Dato che φ è definito positivo abbiamo che

$$f^*(\underline{v}) = \overline{\lambda}\underline{v} \iff q_\varphi(f^*(\underline{v}) - \overline{\lambda}\underline{v}) = 0.$$

$V_\lambda(f)$ è f^* invariante, infatti dato $\underline{w} \in V_\lambda(f)$ abbiamo per la normalità di f

$$f(f^*(\underline{w})) = f^*(f(\underline{w})) = \lambda f^*(\underline{w}) \implies f^*(\underline{w}) \in V_\lambda(f).$$

Ricaviamo quindi che $f^*(\underline{v}) \in V_\lambda(f)$, da cui $f^*(\underline{v}) - \overline{\lambda}\underline{v} \in V_\lambda(f)$.

Consideriamo adesso $\underline{w} \in V_\lambda(f)$ generico:

$$\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \lambda\underline{w}) = \overline{\lambda}\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\overline{\lambda}\underline{v}, \underline{w}),$$

quindi per la linearità nel primo argomento $\varphi(f^*(\underline{v}) - \overline{\lambda}\underline{v}, \underline{w}) = 0$. Ma allora sostituendo $f^*(\underline{v}) - \overline{\lambda}\underline{v}$ al posto di $\underline{w}$ troviamo $q_\varphi(f^*(\underline{v}) - \overline{\lambda}\underline{v}) = 0$, ovvero $f^*(\underline{v}) - \overline{\lambda}\underline{v} = \underline{0}$ come cercavamo. □

Teorema 9.38 (Teorema Spettrale Hermitiano)**.**
Se f è un endomorfismo normale allora è unitariamente diagonalizzabile.

Dimostrazione. Essendo f, f^* endomorfismi complessi, essi ammettono un autovettore $\underline{v}'$, e quindi anche un altro autovettore $\underline{v} = (1/\sqrt{q_\varphi(\underline{v}')})\underline{v}'$ tale che $q_\varphi(\underline{v}) = 1$. Decomponiamo quindi $V = \operatorname{Span}(\underline{v}) \oplus^{\perp} \underline{v}^{\perp}$. Se mostriamo che $\underline{v}^{\perp}$ è f e f^*-invariante possiamo concludere per induzione sulla dimensione di V (un endomorfismo su uno spazio di dimensione 1 è diagonale per ogni base).

Sia $\underline{w} \in \underline{v}^{\perp}$ e mostriamo $f(\underline{w}) \perp \underline{v}$ e $f^*(\underline{w}) \perp \underline{v}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) &= \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \overline{\lambda}\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \\ \varphi(\underline{v}, f^*(\underline{w})) &= \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0. \end{aligned}$$

□

Come per il caso reale, proponiamo una dimostrazione più semplice ma non costruttiva.

Dimostrazione. Ogni endomorfismo complesso è triangolabile, quindi applicando Gram-Schmidt 5.3.2 e normalizzando troviamo che ogni endomorfismo complesso è triangolabile da una base unitaria $\mathcal{B}$. Passiamo allora alle matrici associate: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = T$ triangolare superiore, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^*) = \overline{T}^{\top}$. Dato che f è normale, T e $\overline{T}^{\top}$ commutano. Ponendo

$$T = \begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,n} \\ & z_{2,2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & z_{n-1,n} \\ & & & z_{n,n} \end{pmatrix} \implies \overline{T}^{\top} = \begin{pmatrix} \overline{z_{1,1}} & & & \\ \overline{z_{1,2}} & \overline{z_{2,2}} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \overline{z_{1,n}} & \cdots & \overline{z_{n-1,n}} & \overline{z_{n,n}} \end{pmatrix},$$

da $T\overline{T}^{\top} = \overline{T}^{\top}T$ troviamo che $\sum_{i=1}^{n} |z_{1,i}|^2 = |z_{1,1}|^2$, da cui $\forall i \neq 1, z_{1,i} = 0$. Troviamo quindi che in realtà le matrici hanno questa forma

$$T = \begin{pmatrix} z_{1,1} & & & \\ & z_{2,2} & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & z_{n,n} \end{pmatrix} \implies \overline{T}^{\top} = \begin{pmatrix} \overline{z_{1,1}} & & & \\ & \overline{z_{2,2}} & & \\ & * & \ddots & \\ & * & * & \overline{z_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

Reiterando troviamo che ogni entrata di T è nulla se non per la diagonale, quindi T è diagonale, che è la tesi. □

Corollario 9.39.
Se f è un endomorfismo normale allora:

$$f \text{ autoaggiunto } \iff sp(f) \subset \mathbb{R}$$
$$f \text{ anti-autoaggiunto } \iff sp(f) \subset i\mathbb{R}$$
$$f \text{ unitario } \iff sp(f) \subset S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base unitaria che diagonalizza f.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = \overline{D}^\top = \overline{D} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{array}{llll} f = f^* & \iff D = \overline{D} & \iff \lambda_i = \overline{\lambda_i} & \iff sp(f) \subset \mathbb{R}. \\ f = -f^* & \iff D = -\overline{D} & \iff \lambda_i = -\overline{\lambda_i} & \iff sp(f) \subset i\mathbb{R}. \\ f^{-1} = f^* & \iff D^{-1} = \overline{D} & \iff \frac{1}{\lambda_i} = \overline{\lambda_i} \iff |\lambda_i|^2 = 1 & \iff sp(f) \subset S^1. \end{array}$$

□

Corollario 9.40.
Sia (V, φ) con φ prodotto Hermitiano definito positivo, allora $\forall \psi$ prodotto Hermitiano su V, $\exists \mathcal{B}$ base di V unitaria per φ e ortogonale per φ.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base unitaria per φ e consideriamo $H = M_{\mathcal{B}}(\psi)$. Osservo che H è Hermitiana e quindi normale, quindi $\exists U \in U(n, \mathbb{C})$ tale che $\overline{U}^\top HU = U^{-1}HU = D$ diagonale. Interpretando $\overline{U}$ come un cambio di base da $\mathcal{B}$ a una certa base $\mathcal{B}'$ vediamo che $\mathcal{B}'$ è sempre unitaria per definizione di $U(n, \mathbb{C})$ ed è ortogonale per ψ perché abbiamo $M_{\mathcal{B}'}(\psi) = \overline{U}^\top HU = D$. □

Capitolo 10

Geometria Affine

Per tutta la trattazione precedente abbiamo considerato dei tipi di spazio con un punto privilegiato, l'origine. Ma gli oggetti geometrici non hanno una origine intrinseca, quindi proviamo a estendere ciò che abbiamo fatto in questa direzione.

10.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 10.1 (Spazio affine)**.**
Dato uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, l'insieme non vuoto $\mathbb{A}$ è uno *spazio affine* su V se dotato delle seguenti applicazioni:

- $+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times V & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (P, \underline{v}) & \longmapsto & P + \underline{v} \end{array}$ detta *somma punto-vettore*, la quale gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll} \forall P \in \mathbb{A}, \forall \underline{v}, \underline{w} \in V, & P + (\underline{v} + \underline{w}) = (P + \underline{v}) + \underline{w}, \\ \forall P, Q \in \mathbb{A}, \exists! \underline{v} \in V \ t.c. & Q = P + \underline{v}. \end{array}$$

- $vec : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \longrightarrow & V \\ (P, Q) & \longmapsto & \underline{v} \end{array}$ dove $\underline{v}$ è il vettore tale che $P + \underline{v} = Q$.

Gli elementi di uno spazio affine sono detti *punti.*

Osservazione 10.2.
vec ristretta a $\{P\} \times \mathbb{A} \to V$ è biunivoca

Dimostrazione. Dato $\underline{v} \in V$, $vec(P, P + \underline{v}) = \underline{v}$, quindi questa restrizione è surgettiva.
Dati $Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}$ tali che $vec(P, Q_1) = vec(P, Q_2) = \underline{v}$ abbiamo $P + \underline{v} = Q_1$ e $P + \underline{v} = Q_2$. Per la seconda proprietà della somma punto-vettore abbiamo $Q_1 = Q_2$, quindi la restizione di vec è anche iniettiva. $\square$

Per aumentare la leggibilità poniamo le seguenti notazioni:

$$vec(P, Q) \doteqdot \overrightarrow{PQ} \doteqdot Q - P,$$

rispettivamente la *notazione geometrica* e la *notazione aritmetica.*

Osservazione 10.3.
Uno spazio vettoriale V dotato dell'usuale somma e ponendo $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ $\overrightarrow{\underline{v}\underline{w}} = \underline{w} - \underline{v}$ è uno spazio affine su se stesso.

Definizione 10.4 (Spazio affine standard)**.**
Lo spazio affine dato da uno spazio vettoriale V munito dell'usuale somma e di $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ $\overrightarrow{\underline{v}\underline{w}} = \underline{w} - \underline{v}$ viene indicato con $\mathbb{A}(V)$.
Lo spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{K}^n) \doteqdot \mathbb{A}^n$ è detto *spazio affine standard.*

Definizione 10.5 (Dimensione di uno spazio affine)**.**
Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V poniamo $\dim \mathbb{A} = \dim V$.

Osservazione 10.6.
$\forall P \in \mathbb{A}$ abbiamo $\overrightarrow{PP} = \underline{0} \Longleftrightarrow P + \underline{0} = P$, infatti

$$P + \underline{0} = (P + \overrightarrow{PP}) + \underline{0} = P + (\overrightarrow{PP} + \underline{0}) = P + \overrightarrow{PP} = P.$$

Per l'unicità imposta dalla somma punto-vettore abbiamo che se $\underline{v} \in V$ è tale che $P + \underline{v} = P$ allora $\underline{v} = \underline{0}$.

Osservazione 10.7.
$\forall P, Q \in \mathbb{A}, \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$, infatti

$$\begin{aligned} Q + (-\overrightarrow{PQ}) =& (P + \overrightarrow{PQ}) + (-\overrightarrow{QP}) = \\ =& P + (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ}) = \\ =& P + \underline{0} = P = \\ =& Q + \overrightarrow{QP}, \end{aligned}$$

quindi per l'unicità $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$.

Osservazione 10.8 (Proprietà del triangolo)**.**
$\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$ abbiamo $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \underline{0}$. Equivalentemente $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Dimostrazione.

$$P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}) = Q + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}) = R + \overrightarrow{RP} = P,$$

quindi $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \underline{0}$ come voluto. □

In notazione aritmetica le proprietà trovate vengono scritte:

$$P - P = \underline{0}, \quad P - Q = -(Q - P),$$

$$(Q - P) + (Q - R) + (R - P) = \underline{0} \Longleftrightarrow (Q - P) + (R - Q) = R - P.$$

10.2 Spazi sugli affini e traslazioni

Poniamo

$$S_P : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ \underline{v} & \longmapsto & P + \underline{v} \end{array}, \quad F_P : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \longrightarrow & V \\ Q & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}.$$

Chiaramente S_P e F_P sono inverse. Trattiamoli come isomorfismi e definiamo una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{A}$:

Identifichiamo l'origine ($\underline{0}$) con $S_P(\underline{0}) = P$ e definiamo le seguenti applicazioni:

$$Q_1 +_P Q_2 = S_P(F_P(Q_1) + F_P(Q_2)) =$$

$$= S_P(\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{PQ_2}) = P + (\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{PQ_2}) =$$

$$= Q_1 + \overrightarrow{PQ_2} = Q_2 + \overrightarrow{PQ_1}.$$

Equivalentemente $Q_1 +_P Q_2 = Q_2 + Q_1 - P = Q_1 + Q_2 - P$.

$$\lambda \cdot_P Q = S_P(\lambda F_P(Q)) = P + \lambda\overrightarrow{PQ}.$$

Equivalentemente $\lambda \cdot_P Q = P + \lambda(Q - P) \doteqdot \lambda Q + (1 - \lambda)P$.

Definizione 10.9 (Spazio vettoriale con origine in un punto)**.**
Lo spazio vettoriale $(\mathbb{A}, +_P, \cdot_P)$ è denotato $\mathbb{A}_P$ ed è uno spazio isomorfo a V.

Possiamo restringere la somma punto-vettore anche fissando il vettore, trovando

$$\tau_{\underline{v}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ P & \longmapsto & P + \underline{v} \end{array}$$

ovvero la *traslazione* di un vettore $\underline{v}$.

Osservazione 10.10.

$$\tau_{\underline{v}} \circ \tau_{\underline{w}} = \tau_{\underline{v}+\underline{w}} = \tau_{\underline{w}} \circ \tau_{\underline{v}}, \qquad \tau_{\underline{0}} = id_{\mathbb{A}}, \qquad \tau_{\underline{v}}^{-1} = \tau_{-\underline{v}}.$$

Osservazione 10.11.
L'insieme delle traslazioni su $\mathbb{A}$ (che denotiamo $T(\mathbb{A})$) munito della composizione è un gruppo abeliano isomorfo a $(V, +)$.

Dato $P \in \mathbb{A}$ vediamo che

$$\tau_{\underline{v}} \circ S_P(\underline{u}) = \tau_{\underline{v}}(P + \underline{u}) = P + (\underline{v} + \underline{u}) = (P + \underline{v}) + \underline{u} = S_{P+\underline{v}}(\underline{u}),$$

quindi $\tau_{\underline{v}} \circ S_P = S_{P+\underline{v}}$, quindi $\tau_{\underline{v}} = S_{P+\underline{v}} \circ F_P$, ovvero $\tau_{\underline{v}}$ è un isomorfismo da $\mathbb{A}_P$ a $\mathbb{A}_{P+\underline{v}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_P \arrow[rr, "\tau_{\underline{v}}"] \arrow[dr, "F_P"'] & \circlearrowleft & \mathbb{A}_{P+\underline{v}} \\
& V \arrow[ur, "S_{P+\underline{v}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dato che possiamo definire delle strutture di spazio vettoriale sugli spazi affini possiamo provare a estendere alcune definizioni agli spazi affini, a patto che queste nuove definizioni non dipendano dalla specifica struttura di spazio vettoriale usata per definirle.

10.3 Combinazioni affini

Definizione 10.12 (Combinazione affine)**.**
Una *combinazione affine* è una combinazione lineare su $\mathbb{A}_P$ per un qualsiasi $P \in \mathbb{A}$ che non dipende da P stesso, ovvero $\forall P, Q \in \mathbb{A}$, se $Q_1, \cdots Q_k$ e $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sono tali che

$$\lambda_1 \cdot_P Q_1 +_P \cdots +_P \lambda_k \cdot_P Q_k = \lambda_1 \cdot_Q Q_1 +_Q \cdots +_Q \lambda_k \cdot_Q Q_k$$

la combinazione lineare è affine.

Le combinazioni affini esistono, infatti il punto medio tra Q_1 e Q_2 è indipendente dall'origine scelta ed è sempre espresso come $\frac{1}{2} \cdot_P Q_1 +_P \frac{1}{2} \cdot_P Q_2$.

Però non tutte le combinazioni lineari sono affini, per esempio dato Q possiamo costruire una combinazione lineare di due punti arbitrari Q_1 e Q_2 tale che scegliendo una opportuna origine questa restituisca Q. La combinazione in questione è $Q_1 +_{(Q_1 +_Q Q_2)} Q_2$.

Proposizione 10.13 (Caratterizzazione delle combinazioni affini)**.**
Dati $Q_1, \cdots Q_k \in \mathbb{A}$ e $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, la combinazione lineare

$$\lambda_1 \cdot_P Q_1 +_P \cdots +_P \lambda_k \cdot_P Q_k$$

non dipende da P (cioè è affine) se e solo se $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Dimostrazione. Fissati $P_0 \neq P_1 \in \mathbb{A}$, abbiamo $\overrightarrow{P_0P_1} \neq \underline{0}$. Per la proprietà del triangolo abbiamo $\overrightarrow{P_1Q_i} = \overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_0Q_i}$. Scriviamo le combinazioni rispetto alle due origini:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot_{P_1} Q_1 +_{P_1} \cdots +_{P_1} \lambda_k \cdot_{P_1} Q_k = \\
&= P_1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_1Q_i} = P_0 + \overrightarrow{P_0P_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_0Q_i}) = \\
&= P_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{P_0P_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0Q_i},
\end{aligned}$$

mentre

$$\lambda_1 \cdot_{P_0} Q_1 +_{P_0} \cdots +_{P_0} \lambda_k \cdot_{P_0} Q_k = P_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0Q_i},$$

quindi le due coincidono se e solo se

$$\begin{gathered}
\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{P_0P_1} + \cancel{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0Q_i}} = \cancel{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0Q_i}} \\
\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{P_0P_1} = \underline{0}.
\end{gathered}$$

Per quanto osservato $\overrightarrow{P_0P_1} \neq \underline{0}$, quindi $1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. $\square$

Per semplicità notazionale, quando trattiamo scalari tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ scriviamo la combinazione affine come

$$\lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_k Q_k,$$

estendendo la notazione aritmetica. Effettivamente notiamo che adesso la notazione aritmetica permette manipolazioni algebriche, purché il risultato finale mantenga la somma dei coefficienti unitaria.

Osservazione 10.14.
$\lambda_1 \cdot_P Q_1 +_P \cdots +_P \lambda_k \cdot_P Q_k = \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_k Q_k + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) P$, che è una combinazione affine. Ogni combinazione lineare è quindi una combinazione affine, a patto di ricordare che il punto di origine non è nullo in tutti gli spazi vettoriali su $\mathbb{A}$ (infatti escludendo quel termine la combinazione non rimane costante cambiando origine).

Ricapitolando:

- Una combinazione affine di punti di $\mathbb{A}$ è una combinazione lineare di quei punti visti come vettori in $\mathbb{A}_P$ per un qualunque P.
- Una combinazione lineare di vettori in $\mathbb{A}_P$ è una combinazione affine di punti in $\mathbb{A}$, a patto di includere anche P con un appropriato coefficiente.

10.4 Sottospazi affini

Definizione 10.15 (Sottospazio affine)**.**
$E \subset \mathbb{A}$ è un *sottospazio affine* si $\mathbb{A}$ se è chiuso per combinazioni affini. Poniamo per completezza che $\emptyset$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$.

Osservazione 10.16.
L'intersezione di sottospazi affini rimane un sottospazio affine.

Osservazione 10.17.
Se E è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ non vuoto, fissato $P \in E$, abbiamo che le combinazioni lineari in $\mathbb{A}_P$ dei punti di E sono combinazioni affini di quelli stessi punti e P; essendo E chiuso per tali combinazioni abbiamo che E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{A}_P$ per $P \in E$.

Viceversa, dato un sottospazio vettoriale F di $\mathbb{A}_Q$, esso è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$. Infatti, usando la struttura di $\mathbb{A}_Q$ abbiamo che le combinazioni lineari si traducono in affini aggiungendo il termine in Q, il quale è chiaramente contenuto in F.

Osservazione 10.18.
Dato E sottospazio affine non vuoto, fissato $P \in E$ abbiamo che $F_P(E) = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in E\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

10.4.1 Giacitura

Definizione 10.19 (Giacitura)**.**
Il sottospazio vettoriale $F_P(E) \subset V$ è detto *giacitura* di E e si indica $Giac(E)$. Poniamo $Giac(\emptyset) = \emptyset$.
Se E è non vuoto, poniamo $\dim E = \dim Giac(E)$.

Proposizione 10.20.
Dato E sottospazio affine non vuoto, $Giac(E) = F_P(E)$ non dipende da P.

Dimostrazione. Dati $P_1, P_2 \in E$ vogliamo mostrare che $F_{P_1}(E) = F_{P_2}(E)$. Per la simmetria del problema basta mostrare un contenimento.

Osserviamo che $\forall \underline{v} \in F_{P_1}(E)$, $\underline{v} = \overrightarrow{P_1Q}$ con $Q \in E$. Dalla proprietà del triangolo

$$\overrightarrow{P_1Q} = -\overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_2Q},$$

dato che entrambi gli addendi appartengono a $F_{P_2}(E)$ abbiamo che $\underline{v} = \overrightarrow{P_1Q} \in F_{P_2}(E)$. □

Osservazione 10.21.
Dato W un sottospazio vettoriale di V e dato $P \in \mathbb{A}$ allora il sottospazio di $\mathbb{A}_P$ dato da $S_P(W) = \{P + \underline{w} \mid \underline{w} \in W\} \doteqdot P + W$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ di giacitura W che passa per P.

Usando questa notazione vediamo che, dato E sottospazio affine di $\mathbb{A}$, abbiamo

$$E = P + Giac(E), \qquad \forall P \in E.$$

Un fatto interessante che ne discende è che E è invariante per traslazione rispetto a un vettore della propria giacitura:

$$E = R + W = S_R(W) = (\tau_{P-R} \circ S_P)(W) = \tau_{P-R}(E),$$

e in effetti per $Q \in E$ abbiamo che $\tau_{R-P}(Q) = Q + P - R$, che è combinazione affine di elementi di E, quindi appartiene ad E. Per l'altra appartenenza abbiamo che per $Q \in E$, $Q = Q + R - P + P - R$ e $Q + R - P \in E$ per il motivo sopra.

Proposizione 10.22.
Dati $E, F \subset \mathbb{A}$ sottospazi affini tali che $Giac(E) = Giac(F) = W$ abbiamo che se $E \cap F \neq \emptyset$ allora $E = F$

Dimostrazione. Sia $P \in E \cap F$, allora $E = P + W = F$. □

La proposizione precedente essenzialmente afferma se che spazi paralleli si intersecano allora coincidono, ovvero che spazi paralleli diversi non si incontrano.

Osservazione 10.23.
Dato E sottospazio affine di $\mathbb{A}$ abbiamo che restringendo la somma punto e vettore di $\mathbb{A}$

$$+|_{E\times Giac(E)} : E \times Giac(E) \to E$$

abbiamo che E è uno spazio affine su $Giac(E)$.

10.4.2 Generato affine

Definizione 10.24 (Sottospazio generato affine)**.**
Dato $X \subset \mathbb{A}$ non vuoto definiamo il sottospazio affine generato da X come il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}$ che contiene X.

$$\operatorname{Span}_a(X) = \bigcap_{\substack{X\subset E\subset A \\ E \text{ ssp. affine}}} E$$

Osservazione 10.25.
Dato $P \in X$ vediamo che $\operatorname{Span}_a(X) = \operatorname{Span}_{\mathbb{A}_P}(X)$ e che

$$\operatorname{Span}_a(X) = \{\text{combinazioni affini di punti di } X\}$$

Osservazione 10.26.
Se E è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ non vuoto, fissato $P \in E$ e considerando X un insieme di generatori di E come sottospazio vettoriale di $\mathbb{A}_P$ vediamo che X è di generatori affini, ovvero $E = \operatorname{Span}_a(X)$.

Ricapitoliamo le propritā esposte nella seguene proposizione

Proposizione 10.27.
I seguenti fatti sono equivalenti:

- *$E \subset \mathbb{A}$ è sottospazio affine*
- *$\exists P \in \mathbb{A}$ t.c. E è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{A}_P$*
- *$\exists W$ sottospazio vettoriale di V e $P \in \mathbb{A}$ tali che $E = P + W$*
- *$\exists X \subset \mathbb{A}$ tale che $E = \operatorname{Span}_a(X)$.*

Inoltre $E = P + Giac(E)$, $\forall P \in E$

Osservazione 10.28.
$Giac(E) = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in E\}$, infatti

$$\{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in E\} = \bigcup_{P\in E} F_P(E) = \bigcup_{P\in E} Giac(E) = Giac(E).$$

10.4.3 Intersezione e somma di sottospazi affini

Osservazione 10.29.
Dati E, F sottospazi affini di $\mathbb{A}$ non vuoti abbiamo che:

- $E \cap F$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ (potenzialmente vuoto).
- $E \subset F \implies Giac(E) \subset Giac(F)$, infatti per $P, Q \in E$ ($\overrightarrow{PQ} \in Giac(E)$) abbiamo $P, Q \in F$ ($\overrightarrow{PQ} \in Giac(F)$).

Proposizione 10.30.
Se $E \cap F \neq \emptyset$ abbiamo $Giac(E \cap F) = Giac(E) \cap Giac(F)$.

Dimostrazione. Fissiamo $P \in E \cap F$, da cui $E = P + Giac(E)$ e $F = P + Giac(F)$. Consideriamo allora $Q \in E \cap F$:

$$Q = P + \underbrace{\underline{v}}_{\in Giac(E)} = P + \underbrace{\underline{w}}_{\in Giac(F)},$$

ovvero $Q = P + \underline{v}$ con $\underline{v} \in Giac(E) \cap Giac(F)$, quindi

$$E \cap F = P + (Giac(E) \cap Giac(F)) \implies Giac(E) = (Giac(E) \cap Giac(F)).$$

□

Proposizione 10.31.
Fissati $P \in E$ e $Q \in F$, abbiamo che

$$E \cap F = \emptyset \iff \overrightarrow{PQ} \notin Giac(E) + Giac(F).$$

Dimostrazione.
$\implies$) Se avessimo $\overrightarrow{PQ} = \underline{v} + \underline{w}$ con $\underline{v} \in Giac(E)$ e $\underline{w} \in Giac(F)$ consideriamo $P + \underline{v}$, il quale è chiaramente punto di E.

$$P + \underline{v} = P + \overrightarrow{PQ} - \underline{w} = Q - \underline{w},$$

ma $Q - \underline{w} \in F$, quindi $P + \underline{v} = Q - \underline{w} \in E \cap F$ ↯.
$\impliedby$) Se avessimo $R \in E \cap F$ avremmo $\overrightarrow{PR} \in Giac(E)$ e $\overrightarrow{QR} \in Giac(F)$. Per la proprietà del triangolo

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QR},$$

da cui $\overrightarrow{PQ} \in Giac(E) + Giac(F)$ ↯. □

Corollario 10.32.
Se $Giac(E) + Giac(F) = V$ allora, dato che $\overrightarrow{PQ} \in V$, abbiamo $\overrightarrow{PQ} \in Giac(E) + Giac(F)$, quindi $E \cap F \neq \emptyset$.

Analizziamo adesso la somma di sottospazi affini.

Osservazione 10.33.
Come nel caso degli spazi vettoriali, $E \cup F$ in generale NON è sottospazio affine.

Definizione 10.34 (Somma affine)**.**
Dati E e F sottospazi affini, definiamo la loro *somma affine* come

$$E + F = \mathrm{Span}_a(E \cup F).$$

Proposizione 10.35.
Presi $P \in E$, $Q \in F$ abbiamo

$$Giac(E + F) = Giac(E) + Giac(F) + \mathrm{Span}(\overrightarrow{PQ}).$$

Dimostrazione. $\supset$) Dato che $E, F \subset E + F$, abbiamo $Giac(E), Giac(F) \subset Giac(E + F)$, inoltre osserviamo che $P, Q \in E + F$, da cui $\overrightarrow{PR} \in Giac(E + F)$.
$\subset$) Scriviamo $E = P + Giac(E)$ e $F = Q + Giac(F)$ e scegliamo $R, R' \in E + F$. Essi sono esprimibili in termini di combinazioni affini

$$R = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i (P + \underline{v}_i) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j (Q + \underline{w}_j), \quad \underline{v}_i \in Giac(E), \underline{w}_j \in Giac(F)$$

$$R' = \sum_{i=1}^{h'} \lambda'_i (P + \underline{v}'_i) + \sum_{j=1}^{k'} \mu'_j (Q + \underline{w}'_j), \quad \underline{v}'_i \in Giac(E), \underline{w}'_j \in Giac(F).$$

Dato che $\sum \lambda_i + \sum \mu_j = \sum \lambda'_i + \sum \mu'_j = 1$ abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{h'} \lambda'_i - \sum_{i=1}^{h} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i - \sum_{i=1}^{k'} \mu'_i \doteqdot \alpha.$$

Troviamo quindi che

$$R - R' = \alpha(Q - P) + \underbrace{\sum_{i=1}^{h'} \lambda'_i \underline{v}'_i - \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \underline{v}_i}_{\in Giac(E)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mu_i \underline{w}_i - \sum_{i=1}^{k'} \mu'_i \underline{w}'_i}_{\in Giac(F)},$$

da cui la tesi. □

Proposizione 10.36 (Formula di Grassmann affine)**.**
Se $E \cap F \neq \emptyset$ *abbiamo*

$$\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F,$$

mentre se $E \cap F = \emptyset$ *abbiamo*

$$\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim(Giac(E) \cap Giac(F)) + 1.$$

Dimostrazione. ($\star$) Se $E \cap F \neq \emptyset$ abbiamo che $\overrightarrow{PQ} \in Giac(E) + Giac(F)$, quindi $Giac(E + F) = Giac(E) + Giac(F)$. Dato che $\dim E + F = \dim Giac(E + F)$ e che in questo caso $Giac(E \cap F) = Giac(E) \cap Giac(F)$ abbiamo la tesi per la formula di Grassmann per sottospazi.
($\star$) Se $E \cap F = \emptyset$ allora $Giac(E + F) = (Giac(E) + Giac(F)) \oplus \text{Span}\,(\overrightarrow{PQ})$, quindi

$$\dim E + F = \dim(Giac(E) + Giac(F)) + 1,$$

da cui la tesi applicando la formula di Grassmann per sottospazi. □

10.5 Applicazioni affini

Definizione 10.37 (Applicazione affine)**.**
Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $\mathbb{A}$ spazio affine su V e $\mathbb{B}$ spazio affine su W. La mappa $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ è detta *affine* se conserva le combinazioni affini:
$\forall Q_1, \cdots, Q_k \in \mathbb{A}, \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\sum \lambda_i = 1$

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(Q_i).$$

In realtà le applicazioni affini sono molto legate alle applicazioni lineari

Proposizione 10.38.
Fissato $P \in \mathbb{A}$ *consideriamo* f *sulla struttura di spazio vettoriale di* $\mathbb{A}$ *e* $\mathcal{B}$*:*

$$f_P : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_P & \longrightarrow & \mathbb{B}_{f(P)} \\ Q & \longmapsto & f(Q) \end{array}.$$

f_P *è lineare.*

Dimostrazione.
($\star$) Dati $Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}_P$ abbiamo che

$$f_P(Q_1 +_P Q_2) = f(Q_1 + Q_2 - P) = f(Q_1) + f(Q_2) - f(P) = f_P(Q_1) +_{f(P)} f_P(Q_2).$$

($\star$) Dati $Q \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$f_P(\lambda \cdot_P Q) = f(\lambda Q + (1 - \lambda)P) = \lambda f(Q) + (1 - \lambda) f(P) = \lambda \cdot_{f(P)} f_P(Q).$$

□

Proposizione 10.39.
Data $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tale che $\exists P \in \mathbb{A}, Q \in \mathbb{B}$ tali che $F : \mathbb{A}_P \to \mathbb{B}_Q$ lineare, essa è affine e $F(P) = Q$.

Dimostrazione. Osserviamo che $F(P) = F(\underline{0}) = \underline{0} = Q$. Verifichiamo ora che F rispetta formalmente la notazione aritmetica
($\star$) Dati $Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}$ abbiamo che

$$F(Q_1 + Q_2) = F(\overrightarrow{PQ_1} +_P \overrightarrow{PQ_2}) = F(\overrightarrow{PQ_1}) +_Q F(\overrightarrow{PQ_2}) = F(Q_1) + F(Q_2).$$

($\star$) Dati $R \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo

$$F(\lambda R) = F(\lambda \cdot_P \overrightarrow{PR}) = \lambda \cdot_Q F(\overrightarrow{PR}) = \lambda F(R).$$

Dato che rispetta la somma formale e il prodotto per scalare formale, F rispetta le combinazioni lineari e quindi in particolare le combinazioni affini. $\square$

Consideriamo adesso il seguente diagramma e definiamo df_P in modo da renderlo commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_P \arrow[r, "f_P"] & \mathbb{B}_{f(P)} \\
V \arrow[u, "S_P"] \arrow[r, "df_P"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[u, "S_{f(P)}"']
\end{tikzcd}$$

vediamo quindi che $\forall \underline{v} \in V$, $df_P(\underline{v}) = f(P + \underline{v}) - f(P)$.

Proposizione 10.40.
df_P non dipende da P

Dimostrazione. Sia $Q \in \mathbb{A}$, da cui $df_Q(\underline{v}) = f(Q + \underline{v}) - f(Q)$. Consideriamo la seguente catena di uguaglianze

$$f(P + \underline{v}) = f(Q + P - Q + \underline{v}) = f((Q + \underline{v}) + P - Q) = f(Q + \underline{v}) + f(P) - f(Q),$$

da cui

$$df_Q(\underline{v}) = f(Q + \underline{v}) - f(Q) = f(P + \underline{v}) - f(P) = df_P(\underline{v}).$$

$\square$

È quindi ben posta la seguente definizione

Definizione 10.41 (Differenziale di f)**.**
Data $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ applicazione affine definiamo il *differenziale* di f (o *direzione* di f o *applicazione tangente* di f) la seguente mappa

$$df : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \underline{v} & \longmapsto & f(P + \underline{v}) - f(P) \end{array}$$

per un qualsiasi $P \in \mathbb{A}$.

Osservazione 10.42.
Abbiamo $\forall P, Q \in \mathbb{A}$

$$df(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}, \qquad f(Q) = f(P) + df(\overrightarrow{PQ}).$$

Osservazione 10.43.
Data $F : V \to W$ lineare, $P \in \mathbb{A}$, $Q \in \mathbb{B}$ abbiamo completando il diagramma che

$$f = S_Q \circ F \circ F_P : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$$

è una applicazione affine. Inoltre $df = F$.

Riassumiamo quanto detto nella seguente proposizione

Proposizione 10.44.
I seguenti sono fatti equivalenti:

- $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *affine*
- $\exists P \in \mathbb{A}$ *t.c.* $f_P : \mathbb{A}_P \to \mathcal{B}_{f(P)}$ *è lineare*
- $\exists df : V \to W$ *lineare,* $\exists P \in \mathbb{A}$ *tali che* $f = S_{f(P)} \circ df \circ F_P$

- *$\exists df : V \to W$ lineare, $\exists P \in \mathbb{A}$ t.c. $\forall Q \in \mathbb{A}$, $f(Q) = f(P) + df(\overrightarrow{PQ})$.*

Osservazione 10.45.
In quanto coincidente con una lineare particolare abbiamo che

$$\begin{aligned} f \text{ iniettiva} &\Longleftrightarrow df \text{ iniettiva} \\ f \text{ surgettiva} &\Longleftrightarrow df \text{ surgettiva} \\ f \text{ biunivoca} &\Longleftrightarrow df \text{ isomorfismo} \end{aligned}$$

Proposizione 10.46.
Date $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $g : \mathbb{B} \to \mathbb{D}$ affini abbiamo

- *$g \circ f$ affine e $d(g \circ f) = dg \circ df$*
- *$did_{\mathbb{A}} = id_V$*
- *se f è invertibile allora anche f^{-1} è affine e $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$.*

Osservazione 10.47.
Consideriamo $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(W)$ affine e prendiamo $P = \underline{0}$. Osserviamo che $f(\underline{v}) = f(\underline{0}) + df(\underline{v})$, ovvero

$$f = \tau_{f(\underline{0})} + df(\underline{v}).$$

Osservazione 10.48.
Consideriamo $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ affine, allora $\exists! A \in M(m, n, \mathbb{K}), \underline{y} \in \mathbb{K}^m$ tali che

$$f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{y}$$

e abbiamo $df = L_A$, $f(\underline{0}) = \underline{y}$.

Proposizione 10.49.
Dati $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ affine e E sottospazio affine di $\mathbb{A}$ abbiamo

- *$f(E)$ sottospazio affine di $\mathcal{B}$*
- *Da $E = P + Giac(E)$ troviamo $f(E) = f(P) + df(Giac(E))$, da cui $Giac(f(E)) = df(Giac(E))$.*
- *$\dim f(E) \leq \dim E$ e c'è uguaglianza se e solo se f è iniettiva.*

Definizione 10.50 (Affinità di uno spazio affine)**.**
Dato $\mathbb{A}$ spazio affine, definiamo le *affinità* di $\mathbb{A}$

$$Aff(\mathbb{A}) = \{f : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \mid \text{affini e invertibili}\},$$

le quali sono un gruppo con la composizione.

10.6 Indipendenza e riferimenti affini

Definizione 10.51 (Affinemente indipendenti)**.**
I punti $Q_0, \cdots, Q_m \in \mathbb{A}$ sono *affinemente indipendenti* se $Q_1, \cdots, Q_m$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{A}_{Q_0}$, equivalentemente se $\overrightarrow{Q_0Q_1}, \cdots, \overrightarrow{Q_0Q_m}$ sono linearmente indipendenti su $V = Giac(\mathbb{A})$.

Proposizione 10.52.
La definizione sopra non dipende dall'ordine dei punti.

Dimostrazione. Supponiamo $Q_0, \cdots, Q_{m-1}$ linearmente indipendenti in $\mathbb{A}_{Q_m}$ e mostriamo $Q_1, \cdots, Q_m$ linearmente indipendenti in $\mathbb{A}_{Q_0}$.

Consideriamo una combinazione lineare nulla in $\mathbb{A}_{Q_0}$

$$\lambda_1 \cdot_{Q_0} Q_1 +_{Q_0} \cdots +_{Q_0} \lambda_m \cdot_{Q_0} Q_m = Q_0.$$

Possiamo reinterpretarla come combinazione lineare su $\mathbb{A}_{Q_m}$

$$(-\sum \lambda_i) \cdot_{Q_m} Q_0 +_{Q_m} \lambda_1 \cdot_{Q_m} Q_1 +_{Q_m} \cdots +_{Q_m} \lambda_{m-1} \cdot_{Q_m} Q_{m-1} = -\lambda_m \cdot_{Q_m} Q_m.$$

Dato che $Q_0, \cdots, Q_{m-1}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{A}_{Q_m}$ abbiamo che $\forall i < m, \lambda_i = 0$ e che $\sum \lambda_i = 0$, quindi abbiamo anche $\lambda_m = 0$. Rileggendo la prima equazione allora abbiamo trovato che una combinazione lineare nulla di $Q_1, \cdots, Q_m$ su $\mathbb{A}_{Q_0}$ è necessariamente la combinazione banale, ovvero $Q_1, \cdots, Q_m$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{A}_{Q_0}$. $\square$

Definizione 10.53 (Riferimento affine)**.**
Se $\dim \mathbb{A} = n$, un insieme ordinato di $n+1$ punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}$ è detto *riferimento affine* di $\mathbb{A}$

Osservazione 10.54.
$\{P_0, \cdots, P_n\}$ è un riferimento affine di $\mathbb{A}$ se e solo se $\{P_1, \cdots, P_n\}$ è una base di $\mathbb{A}_{P_0}$, o equivalentemente $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \cdots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ è una base di $V = Giac(\mathbb{A})$.

Data la corrispondenza con le basi troviamo le seguenti proprietà:

- $R = \{P_0, \cdots, P_n\}$ è un riferimento affine di $\mathbb{A}$ se e solo se $\forall Q \in \mathbb{A}$, $\exists! \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum \lambda_i = 1$ t.c. $Q = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$.
- Dato un riferimento affine R possiamo definire un passaggio a coordinate per ogni punto $Q \in \mathbb{A}$
$$[Q]_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = [Q]_{R \setminus \{P_0\}}, \quad \text{con } [\,]_{R\setminus\{P_0\}} : \mathbb{A}_{P_0} \to \mathbb{K}^n$$
- Una applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ è univocamente determinata dai suoi valori su un riferimento affine di $\mathbb{A}$. Equivalentemente, dato $R = \{P_0, \cdots, P_n\}$ riferimento affine di $\mathbb{A}$ e dati $Q_0, \cdots, Q_n \in \mathbb{B}$, $\exists! f$ affine t.c. $f(P_i) = Q_i$
- $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ è un isomorfismo affine se e solo se manda riferimenti affini di $\mathbb{A}$ in riferimenti affini di $\mathbb{B}$.

Definizione 10.55 (Riferimento affine canonico)**.**
Sullo spazio affine $\mathbb{A}^n$, il riferimento $\{\underline{0}, \underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n\}$ è detto il riferimento affine *canonico* di $\mathbb{A}^n$.

10.7 Teorema fondamentale della geometria affine

Dati due punti $P, Q \in \mathbb{A}$ con $P \neq Q$, osserviamo che
$$\text{Span}_a(P, Q) = \{\lambda Q + (1 - \lambda P \mid \lambda \in \mathbb{K})\} = \{P + \lambda\overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in \mathbb{K}\},$$
che è quindi la retta che passa per P e Q.

Definizione 10.56 (Retta passante per due punti)**.**
Dati $P, Q \in \mathbb{A}$ distinti poniamo $r(P, Q) = \text{Span}_a(P, Q)$ la *retta* passante per P e Q.

Osservazione 10.57.
$\{P, Q\}$ è un riferimento affine di $r(P, Q)$.

Definizione 10.58 (Rapporto semplice)**.**
Dati tre punti P, Q, R con $P \neq Q$ e allineati, ovvero $R \in r(P, Q)$, definiamo $[P; Q; R]$ il *rapporto semplice* di P, Q, R come lo scalare tale che
$$R = P + [P; Q; R]\overrightarrow{PQ}.$$
La definizione è ben posta in quanto $\{P, Q\}$ è un riferimento affine di $r(P, Q)$, quindi $[P; Q; R]$ è univocamente determinato.

Osservazione 10.59.
$[P; Q; R] = 0 \iff R = P$ e $[P; Q; R] = 1 \iff R = Q$. Inoltre se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ abbiamo che il segmento che congiunge P e Q è dato da
$$\{P + \lambda\overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$
Similmente possiamo definire le semirette positive e negative considerando rispettivamente $[P; Q; R] \in [1, +\infty)$ e $[P; Q; R] \in (-\infty, 0]$.

Definizione 10.60 (Parallelismo)**.**
E, F sottospazi affini di $\mathbb{A}$ sono *paralleli* ($E \parallel F$) se
$$Giac(E) \subset Giac(F) \quad \text{oppure} \quad Giac(E) \supset Giac(F).$$

Osservazione 10.61.
$r(P, Q) \parallel r(P'Q') \iff \text{Span}(\overrightarrow{PQ}) = \text{Span}(\overrightarrow{P'Q'})$.

Osservazione 10.62.
Osserviamo che $\forall f \in Aff(\mathbb{A})$ abbiamo le seguenti proprietà:

- f è biunivoca
- f manda sottospazi affini in sottospazi affini della stessa dimensione preservando il rapporto semplice
- f manda rette affini in rette affini preservando il rapporto semplice
- f manda rette affini in rette affini ed esiste r retta affine tale che $f|_r$ preserva il rapporto semplice
- f manda rette affini in rette affini.

Teorema 10.63 (Fondamentale della geometria affine)**.**
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione almeno 2 sul campo $\mathbb{K}$ con $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, sia quindi $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V. Data $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ biunivoca abbiamo

1. *Se f manda rette affini in rette affini, allora f manda sottospazi affini in sottospazi affini preservando la dimensione.*
2. *Se f manda rette affini in rette affini ed esiste una retta affine r tale che $f|_r$ preserva il rapporto semplice allora $f \in Aff(\mathbb{A})$.*
3. *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e f manda rette affini in rette affini allora $f \in Aff(\mathbb{A})$.*

Capitolo 11

Classificazione delle coniche

Introduciamo lo studio delle coniche come caso speciale delle soluzioni a equazioni polinomiali.

11.1 Struttura

11.1.1 Spazi proiettivi e ipersuperfici

Dato un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$ e indeterminate $t_1, \cdots, t_n$ ($\mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]$) possiamo costruire una funzione polinomiale

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & p(x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

Definizione 11.1 (Luogo di zeri).
Data la funzione polinomiale indotta da $p \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]$ definiamo il luogo di zeri di p come

$$Z(p) = p^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid p(x_1, \cdots, x_n) = 0 \right\}$$

Osservazione 11.2.
$Z(0) = \mathbb{K}^n$, inoltre per $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ abbiamo $Z(\lambda p) = Z(p)$.

Dalla seconda uguaglianza siamo ispirati a dare la seguente definizione

Definizione 11.3 (Proporzionalità).
I polinomi p_1, p_2 sono proporzionali se $\exists \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ t.c. $p_2 = \lambda p_1$.

Osservazione 11.4.
La proporzionalità su $\mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]\backslash\{0\}$ è una relazione di equivalenza.

Definizione 11.5 (Spazio proiettivo).
Definiamo il *piano proiettivo* come il seguente quoziente

$$\mathbb{PK}[t_1, \cdots, t_n] = {}^{\mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]}\!/\!_{\sim}, \quad p_1 \sim p_2 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\} \ t.c. \ p_2 = \lambda p_1.$$

Osservazione 11.6.
$Z(p)$ e $\deg p$ sono invarianti per proporzionalità.

Definizione 11.7 (Ipersuperficie).
Gli elementi dello spazio proiettivo sono definiti *ipersuperfici*

$$S = [p] \in \mathbb{PK}[t_1, \cdots, t_n],$$

inoltre poniamo $\deg S = \deg p$ e definiamo $Z(S) = Z(p)$ il *supporto* di S e p è l'*equazione* di S.

11.1.2 Equivalenza affine

Definizione 11.8 (Equivalenza affine)**.**
$T, S \subset \mathbb{A}^n$ sono *affinemente equivalenti* se $\exists f \in Aff(\mathbb{A}^n)$ t.c. $f(S) = T$.

Per capire la forma delle quadratiche vogliamo riportare questa definizione alle ipersuperfici.

Definizione 11.9 (Composizione polinomio-affinità)**.**
Dati $p \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]$ e $f \in Aff(\mathbb{A}^n)$ definiamo $p \circ f \in Aff(\mathbb{A}^n)$:
Ricordiamo che $f(\underline{x}) = P\underline{x} + \underline{t}$ con $P \in GL(n, \mathbb{K})$, $\underline{t} \in \mathbb{K}^n$. Sviluppiamo formalmente la seguente operazione nelle indeterminate $t_1, \cdots, t_n$

$$P \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} + \underline{t} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \text{con } q_i \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n], \deg q_i = 1.$$

Poniamo allora

$$p \circ f(t_1, \cdots, t_n) = p(q_1(t_1, \cdots, t_n), \cdots, q_n(t_1, \cdots, t_n)).$$

Dato che $\deg q_i = 1$ abbiamo che $\deg p \circ f = \deg p$.

Osservazione 11.10.
Date $p \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]$, $f \in Aff(\mathbb{A}^n)$

$$f(Z(p)) = Z(p \circ f^{-1}),$$

infatti $x \in f(Z(p)) \iff f^{-1}(x) \in Z(p)$.

Definizione 11.11 (Equivalenza affine per polinomi)**.**
Dati $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]$ sono *affinemente equivalenti* se $\exists f \in Aff(\mathbb{A}^n)$ t.c. $p_2 = p_1 \circ f$

Osservazione 11.12.
Se p_1, p_2 affinemente equivalenti allora $f(Z(p_2)) = Z(p_1)$, cioè i luoghi di zeri sono affinemente equivalenti.

Osservazione 11.13.
Dato che $(\lambda p \circ f) = \lambda(p \circ f)$ abbiamo che l'equivalenza affine è ben definita per le ipersuperfici.

Date $C = [p] \in \mathbb{PK}[t_1, \cdots, t_n]$, $f \in Aff(\mathbb{A}^n)$ poniamo

$$f(C) = [p \circ f^{-1}]$$

in modo che $Z(f(C)) = f(Z(C))$.

Abbiamo quindi che la classe di equivalenza affine di C ipersuperficie (il *tipo affine* di C) è data da $\{f(C) \mid f \in Aff(\mathbb{A}^n)\}$.

11.2 Le quadratiche

Restringiamoci quindi alle ipersuperfici di grado 2, ovvero le *quadratiche* (o coniche). Vogliamo studiare i supporti delle ipersuperfici a meno di equivalenza affine, e per quanto visto possiamo studiare le ipersuperfici stesse, dato che queste determinano il supporto.

11.2.1 Matrici rappresentanti l'equazione

Osserviamo che per $p \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]$ di grado 2 abbiamo $p = p_0 + p_1 + p_2$ con $\deg p_0 = 0$, $\deg p_1 = 1$, $\deg p_2 = 2$ omogenei. Passando alla funzione polinomiale, p_0 restituisce una costante, p_1 rappresenta un funzionale su $\mathbb{K}^n$ e p_2 rappresenta una forma quadratica per un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$ (e per questo ultimo fatto supporremo $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$). Analizziamo in dettaglio questa affermazione:

$$p(t_1, \cdots, t_n) = \underbrace{c}_{p_0} + \underbrace{\sum b_i t_i}_{p_1} + \underbrace{\sum_{i<j} a_{ij} t_i t_j + \sum a_{ii} t_i^2}_{p_2}.$$

Poniamo allora

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}a_{n-1n} \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \cdots & \frac{1}{2}a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix} \in S(n, \mathbb{K}), \quad \underline{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

in modo tale che

$$p(t_1, \cdots, t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} + 2\underline{b}^\top \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} + c.$$

Osservazione 11.14.
Dato che $\deg p = 2$, $p_2 \neq 0$, ovvoro $A \neq 0$.

Possiamo compattare ulteriormente la notazione ponendo

$$M = \begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^\top & c \end{pmatrix} \in S(n+1, \mathbb{K}) \implies p(t_1, \cdots, t_n) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ 1 \end{pmatrix}^\top M \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 11.15.
Posto $T' = \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n & 1 \end{pmatrix}^\top$ abbiamo (osservando che $T^\top \underline{b} = \underline{b}^\top T$)

$$\phi_M(T') = (T')^\top \begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^\top & c \end{pmatrix} T' = T^\top A T + T^\top \underline{b} + \underline{b}^\top T + c = \phi_A(T) + 2\underline{b}^\top T + c.$$

Definizione 11.16 (Matrici che rappresentano un'equazione)**.**
Dato il polinomio $p \in \mathbb{K}[t_1, \cdots, t_n]$ con $\deg p = 2$, poniamo $A(p) = A$ e $M(p) = M$ con le definizioni sopra. $M(p)$ è detta la *matrice che rappresenta* p, mentre $A(p)$ è detta la *matrice che rappresenta la parte quadratica di* p.

Osservazione 11.17.
$M : \mathbb{K}_2[t_1, \cdots, t_n] \to S(n+1, \mathbb{K})$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, infatti è chiaramente lineare e possiamo ricavare una inversa.

11.2.2 Identificazione con l'iperpiano affine

Consideriamo l'applicazione

$$J : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+1} \\ T & \longmapsto & T' \end{array},$$

essa è affine e iniettiva e la sua immagine è un iperpiano affine H di giacitura $\operatorname{Span}(\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n)$. Possiamo allora interpretare J come un isomorfismo affine che identifica $\mathbb{A}^n$ con H.

Osservazione 11.18.
$J(Z(p)) = J(\left\{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid \begin{pmatrix} \underline{x}^\top & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}) = H \cap CI(\phi_M)$

Osservazione 11.19.
Possiamo identificare $Aff(\mathbb{A}^n)$ con $Aff(H)$ considerando $f \mapsto J \circ f \circ J^{-1}$. Cerchiamo la conversione esplicita: Se $f(\underline{x}) = P\underline{x} + \underline{t}$ con $P \in GL(n, \mathbb{K})$ abbiamo

$$(J \circ f \circ J^{-1})(\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix}) = (J \circ f)(\underline{x}) = J(P\underline{x} + \underline{t}) = \begin{pmatrix} P\underline{x} + \underline{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definizione 11.20 (Matrice completa)**.**
La matrice $\begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, \mathbb{K})$ definita come sopra è detta la matrice *completa* dell'affinità f.

Quindi le affinità di H (isomorfe a quelle di $\mathbb{A}^n$) sono date dal sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{K})$ delle matrici complete.

Proposizione 11.21.
$\{\begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid P \in GL(n, \mathbb{K}), \underline{t} \in \mathbb{K}^n\} = \{G \in GL(n+1, \mathbb{K}) \mid G(H) = H\}.$

Dimostrazione. $\subset$) Una affinità di H manda H in H.

$\supset$) Dato che $\underline{e}_{n+1} \in H$ e che G manda H in H, abbiamo che $G(\underline{e}_{n+1}) = \begin{pmatrix} \underline{t} \\ 1 \end{pmatrix}$. Per $\underline{e}_i$ con $i \neq n+1$ abbiamo che $\underline{e}_i + \underline{e}_{n+1} \in H$, quindi $G\underline{e}_i + G\underline{e}_{n+1} \in H$, da cui troviamo che l'ultima entrata di $G\underline{e}_i$ è legata da $x + 1 = 1$, e quindi è 0. Troviamo quindi che $G = \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $P \in M(n, \mathbb{K})$. Dato che G è invertibile, abbiamo che anche P deve essere invertibile, da cui la tesi. $\square$

Osservazione 11.22.
La matrice completa di una traslazione è data da $\begin{pmatrix} I_n & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Osservazione 11.23.
$M(\lambda p) = \lambda M(p)$

Osserviamo cosa succede passando tra equazioni affinemente equivalenti: Data $f \in Aff(\mathbb{A}^n)$, scriviamo $f(\underline{x}) = P\underline{x} + \underline{t}$ con P invertibile. Ricordiamo che

$$(p \circ f)(t_1, \cdots, t_n) = p(q_1, \cdots, q_n), \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} + \underline{t}.$$

Osservando che

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$(p \circ f)(t_1, \cdots, t_n) = (\begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ 1 \end{pmatrix})^\top M(\begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ 1 \end{pmatrix}),$$

quindi $M(p \circ f) = \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\top M \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cioè $M(p)$ cambia per congruenza con una invertibile che fissa H. Più esplicitamente, se $M(p) = \begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^\top & c \end{pmatrix}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} M(p \circ f) &= \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^\top & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} P^\top AP & P^\top A\underline{t} + P^\top \underline{b} \\ (P^\top A\underline{t} + P^\top \underline{b})^\top & \underline{t}^\top A\underline{t} + 2\underline{b}^\top \underline{t} + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Osserviamo che anche $A(p)$ cambia per congruenza, ma in questo caso senza restrizioni. Riassumendo:

Proposizione 11.24.
$M(p)$ e $A(p)$ cambiano per congruenza se p cambia per equivalenza affine, mentre cambiano per proporzionalità se p varia per proporzionalità.

Osservazione 11.25.
Dato che gli invarianti per isometria sono invarianti anche per proporzionalità abbiamo che sono invarianti per equivalenza affine, quindi $\operatorname{rnk} M(p)$, $\operatorname{rnk} A(p)$, $W(M(p))$, $W(A(p))$ sono invarianti per equivalenza affine di quadratiche.

11.2.3 Centri e simmetria centrale

Definizione 11.26 (Simmatria centrale)**.**
Fissato $O \in \mathbb{A}^n$, la *simmetria centrale* di *centro* O è l'affinità

$$\sigma_O : \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ X & \longmapsto & 2O - X \end{array}.$$

Letta come affinità di H, σ_O corrisponde alla matrice $\begin{pmatrix} -I_n & 2O \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definizione 11.27 (Centro)**.**
Data una quadrica C, $O \in \mathbb{A}^n$ si dice *centro* di C se $\sigma_O(C) = C$. Le C ammette almeno un centro diciamo che C è *a centro*.

Osservazione 11.28.
Se $Z(C) \neq \emptyset$ allora O centro per C è un centro di simmetria per il supporto, ovvero

$$\sigma_O(Z(C)) = Z(\sigma_O(C)) = Z(C).$$

Studiamo come si comporta la simmetria centrale sulla matrice che rappresenta la quadrica: Se C si rappresenta con $M = \begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^\top & c \end{pmatrix}$ allora

$$\begin{aligned}
\sigma_O(C) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -I_n & 2O \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\top M \begin{pmatrix} -I_n & 2O \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^2 A & -2AO - \underline{b} \\ (-2AO - \underline{b})^\top & 4O^\top AO + 4\underline{b}^\top O + c \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A & -2AO - \underline{b} \\ (-2AO - \underline{b})^\top & 4O^\top (AO + \underline{b}) + c \end{pmatrix} = M'.
\end{aligned}$$

Quindi O è centro di C se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ tale che $M' = \lambda M$. Dato che $A \neq 0$, troviamo da $A = \lambda A$ che $\lambda = 1$ se esiste. Quindi deve essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} -2AO - \underline{b} = \underline{b} \\ 4O^\top (AO + \underline{b}) = 0 \end{cases} \iff AO = -\underline{b}$$

Ovvero vale la seguente proposizione:

Proposizione 11.29.
La quadratica C, rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^\top & c \end{pmatrix}$, è a centro se e solo se il sistema lineare $A\underline{x} = -\underline{b}$ ammette soluzione, ovvero se e solo se $\operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk}(A|\underline{b})$ per Rouché-Capelli. I centri formano quindi un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$ e nel caso A fosse invertibile esiste un unico centro per C.

Nel caso C abbia centro, applichiamo la traslazione τ_{-O}, da cui C è affinemente equivalente alla quadratica con matrice

$$\begin{pmatrix} A & AO + \underline{b} \\ (AO + \underline{b})^\top & AO + 2\underline{b}^\top O + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \underline{b}^\top O + c \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora il prodotto scalare ϕ_A. Esso ammette una base ortogonale, quindi $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $P^\top AP = D$ diagonale (e dato che $A \neq 0$ supponiamo senza perdita di generalità che $D_{11} \neq 0$). Consideriamo l'equivalente affine dato componendo la matrice sopra con l'affinità $f(\underline{x}) = P\underline{x}$:

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \underline{b}^\top O + c \end{pmatrix}.$$

Proposizione 11.30.
Affinità mandano centri in centri.

Dimostrazione. Data l'affinità $f(\underline{x}) = P\underline{x} + \underline{t} = \underline{y}$ (da cui $f^{-1}(\underline{y}) = P^{-1}\underline{y} - P^{-1}\underline{t}$) abbiamo che preserva i centri se vale la seguente equivalenza (ricordiamo che $f([p]) = [p \circ f^{-1}]$):

$$A\underline{x} = -\underline{b} \iff (P^{-1})^\top AP^{-1}\underline{y} = -(P^{-1})^\top (A(-P^{-1}\underline{t}) + \underline{b}),$$

ma data la definizione di $\underline{y}$ questa è una tautologia. □

Proposizione 11.31.
Se C è affinemente equivalente ad una quadratica con matrice diagonale allora C è a centro.

Dimostrazione. Una quadratica rappresentata da una matrice diagonale ha un centro in $\underline{0}$, quindi applicando l'affinità inversa a questa troviamo che C ha un centro in corrispondenza di $f^{-1}(\underline{0})$. □

11.2.4 Interpretazione geometrica delle affinità di *H*

Abbiamo visto come le matrici della forma

$$M = \begin{pmatrix} P & \underline{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P \in GL(n, \mathbb{K})$$

corrispondono agli elementi di $Aff(H)$. Proviamo ora a interpretarle come cambi di base da una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_{n+1}\}$ a $\mathcal{C}an$. Osserviamo che $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ formano una base di $W = \operatorname{Span}(\underline{e}_1, \cdots, \underline{e}_n) = Giac(H)$, mentre $\underline{v}_{n+1} \in H$.

Definizione 11.32 (Base adattata ad H)**.**
Una base della forma $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_{n+1}\}$ con $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ base di $Giac(H)$ e $\underline{v}_{n+1}$ è detta base *adattata* ad H.

Osservazione 11.33.
Data una base adattata ad H, la matrice le cui colonne sono gli elementi della base rappresenta una affinità di $\mathbb{A}^n$.

Se la quadratica C è rappresentata dalla matrice M consideriamo il prodotto ϕ_M. Notiamo che $\phi_M|_W = \phi_A \neq 0$. Vorremmo trovare una base adattata ad H che rende "semplice" la matrice che rappresenta ϕ_M. Il nostro istinto (motivati dal ragionamento precedente) è cercare una base che diagonalizza la matrice, ovvero una base ortogonale adattata ad H per ϕ_M. Perché questo sia possibile è necessario (per l'esistenza di $\underline{v}_{n+1}$) che

$$W^\perp \cap H = \{\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} \mid A\underline{x} + \underline{b} = \underline{0}\} \neq \emptyset,$$

che è la condizione che abbiamo ricavato sui centri precedentemente. Scegliendo quindi una base ortogonale $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di W e un altro vettore a loro ortogonale $\underline{v}_{n+1} \in W^\perp \cap H$ abbiamo che la matrice associata a ϕ_M risulta essere

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D \text{ diagonale, } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Consideriamo adesso gli altri casi, ovvero $W^\perp \cap H = \emptyset$. Osserviamo allora che $W^\perp \subset Giac(H) = W$, infatti, essendo H un iperpiano affine in $\mathbb{A}^{n+1}$ ogni sottospazio affine di $\mathbb{A}^{n+1}$ con giacitura non contenuta in $Giac(H)$ interseca H.
Da questo troviamo che $Rad(\phi_M) \subset W$, dato che $Rad(\phi_M) \subset U^\perp$ per ogni U sottospazio. Essendo $W^\perp \subset W$ abbiamo che $Rad(\phi_M) \subset Rad(\phi_M|_W) = W^\perp \cap W = W^\perp$. In effetti il contenimento è stretto:

$$\dim Rad(\phi_M|_W) = \dim W^\perp = 1 + \dim(Rad(\phi_M) \cap W) = 1 + \dim Rad(\phi_M).$$

Quindi $\exists \underline{v}_n \in Rad(\phi_M|_W) \setminus Rad(\phi_M)$, da cui esiste $\underline{v}_{n+1} \notin \underline{v}_n^\perp = W$. Consideriamo $U = \operatorname{Span}(\underline{v}_n, \underline{v}_{n+1})$, il quale è un piano iperbolico ($\underline{v}_n$ e $\underline{v}_{n+1}$ linearmente indipendenti, $\underline{v}_n$ isotropo e $\underline{v}_n \not\perp \underline{v}_{n+1}$ quindi il rango della matrice associata è massimo), quindi possiamo supporre senza perdita di generalità $\underline{v}_{n+1}$ isotropo e a meno di scalarlo $\underline{v}_{n+1} \in H$. A meno di scalare $\underline{v}_n$ possiamo anche supporre $\phi_M(\underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}) = 1/2$.
Sia quindi $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ una base ortogonale di W e completiamola a base adattata a H con $\underline{v}_{n+1}$ ponendo le condizioni precedenti, da cui la matrice che rappresenta la conica in questa base è (ricordando che $A \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}, \quad \text{con } D \text{ diagonale, } D_{11} \neq 0.$$

Ricapitoliamo quanto ricavato nella seguente proposizione:

Proposizione 11.34.
Le possibili classi per le matrici apprensentanti una quadratica C a meno di equivalenza affine sono

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che i casi sono discernibili tramite i ranghi e gli indici di Witt di M e A. Numerando i casi nell'ordine esposto:

1. $\operatorname{rnk} M = \operatorname{rnk} A + 1$, $W(M) = W(A) + 1$
2. $\operatorname{rnk} M = \operatorname{rnk} A$, $W(M) = W(A)$
3. $\operatorname{rnk} M = \operatorname{rnk} A + 2$, $W(M) = W(A)$.

11.3 Classificazione delle quadriche complesse e reali

Osserviamo quindi che la classificazione delle quadriche a meno di equivalenza affine è completa se possiamo classificare le forme matriciali diagonali dei prodotti scalari su $\mathbb{K}^n$, cioè se abbiamo invarianti completi per isometria su $PS(\mathbb{K}^n)$.

Abbiamo a disposizione questi invarianti su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$, quindi segue una classificazione di queste.

11.3.1 Classificazione delle quadriche complesse

I prodotti scalari complessi sono individuati a meno di isometria dal loro rango, quindi abbiamo

$$\begin{pmatrix} I_k & & \\ & 0_{n-k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0_{n-k+1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_k & & \\ & 0_{n-k-1} & \\ & & \begin{smallmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

da cui abbiamo le equazioni

$$t_1^2 + \cdots + t_k^2 + 1 \qquad t_1^2 + \cdots + t_k^2 \qquad t_1^2 + \cdots + t_k^2 + t_n$$

e i ranghi

$$\begin{matrix} \operatorname{rnk} M = k+1 \\ \operatorname{rnk} A = k \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \operatorname{rnk} M = k \\ \operatorname{rnk} A = k \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \operatorname{rnk} M = k+2 \\ \operatorname{rnk} A = k \end{matrix}$$

Abbiamo che la coppia $(\operatorname{rnk} M, \operatorname{rnk} A)$ è un invariante completo delle quadratiche su $\mathbb{C}^n$ a meno di equivalenza affine.

Le equazioni per i casi non degeneri sono

$$t_1^2 + \cdots + t_n^2 + 1 \qquad t_1^2 + \cdots + t_{n-1}^2 + t_n,$$

che definiscono *ellissoidi* e *paraboloidi* rispettivamente.

11.3.2 Classificazione delle quadriche reali

I prodotti scalari reali sono individuati dalla segnatura, abbiamo quindi:

$$\begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & 0_{n-p-q-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & 0_{n-p-q-2} & \\ & & & \begin{smallmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

Per la seconda e la terza classe di matrici possiamo supporre $p > q$ a meno di proporzionalità con -1 e di scalare $\underline{v}_n$ in modo da trovare nuovamente $\phi_M(\underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}) = 1/2$. Dato che il rango e l'indice di Witt (insieme al segno della parte anisotropa) sono invarianti completi per i prodotti scalari reali calcoliamoli per le matrici sopra

$$\begin{aligned} \operatorname{rnk} M &= p+q+1 \\ \operatorname{rnk} A &= p+q \\ W(A) &= \min(p,q) + n - p - q \\ W(M) &= \begin{cases} W(A) & \text{se } p \geq q \\ W(A)+1 & \text{se } p < q \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rnk} M &= p+q \\ \operatorname{rnk} A &= p+q \\ W(A) &= q + (n-(p+q)) = n-p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rnk} M &= p+q+2 \\ \operatorname{rnk} A &= p+q \\ W(A) &= n-p \end{aligned}$$

Quindi la quaterna $(\operatorname{rnk} A, \operatorname{rnk} M, W(A), W(M))$ è un invariante completo per le quadratiche su $\mathbb{R}^n$ a meno di equivalenza affine. Le equazioni per i casi non degeneri risultano essere quindi

$$\begin{array}{ll} t_1^2 + \cdots + t_n^2 + 1 & \text{Supporto vuoto} \\ -t_1^2 - \cdots - t_n^2 + 1 & \text{Ellissoidi reali} \\ t_1^2 + \cdots + t_p^2 - t_{p+1}^2 - \cdots - t_n^2 + 1 & \text{Iperboloidi reali} \\ t_1^2 + \cdots + t_p^2 - t_{p+1}^2 - \cdots - t_{n-1}^2 + t_n & \text{Paraboloidi reali} \end{array}$$

I casi degeneri corrispondono a coni o cilindri.

Capitolo 12

Ringraziamenti

Ringrazio i seguenti per aver collaborato nella stesura di alcune parti, per aver offerto consigli su come migliorare le dispense in generale o per aver segnalato degli errori:

- Federico Allegri
- Edoardo Loiero
- Davide Ranieri
- Tommaso Bellanova